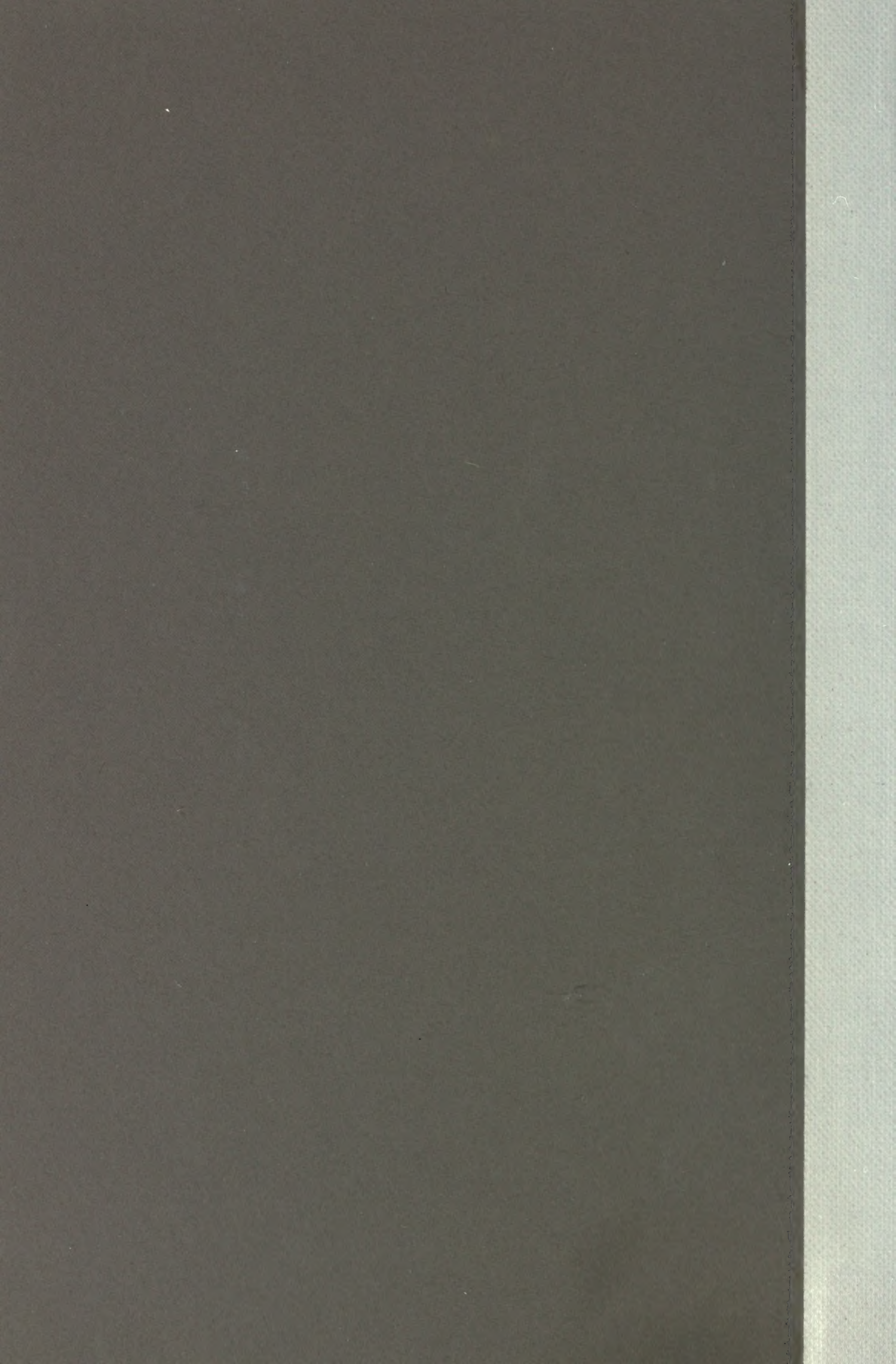
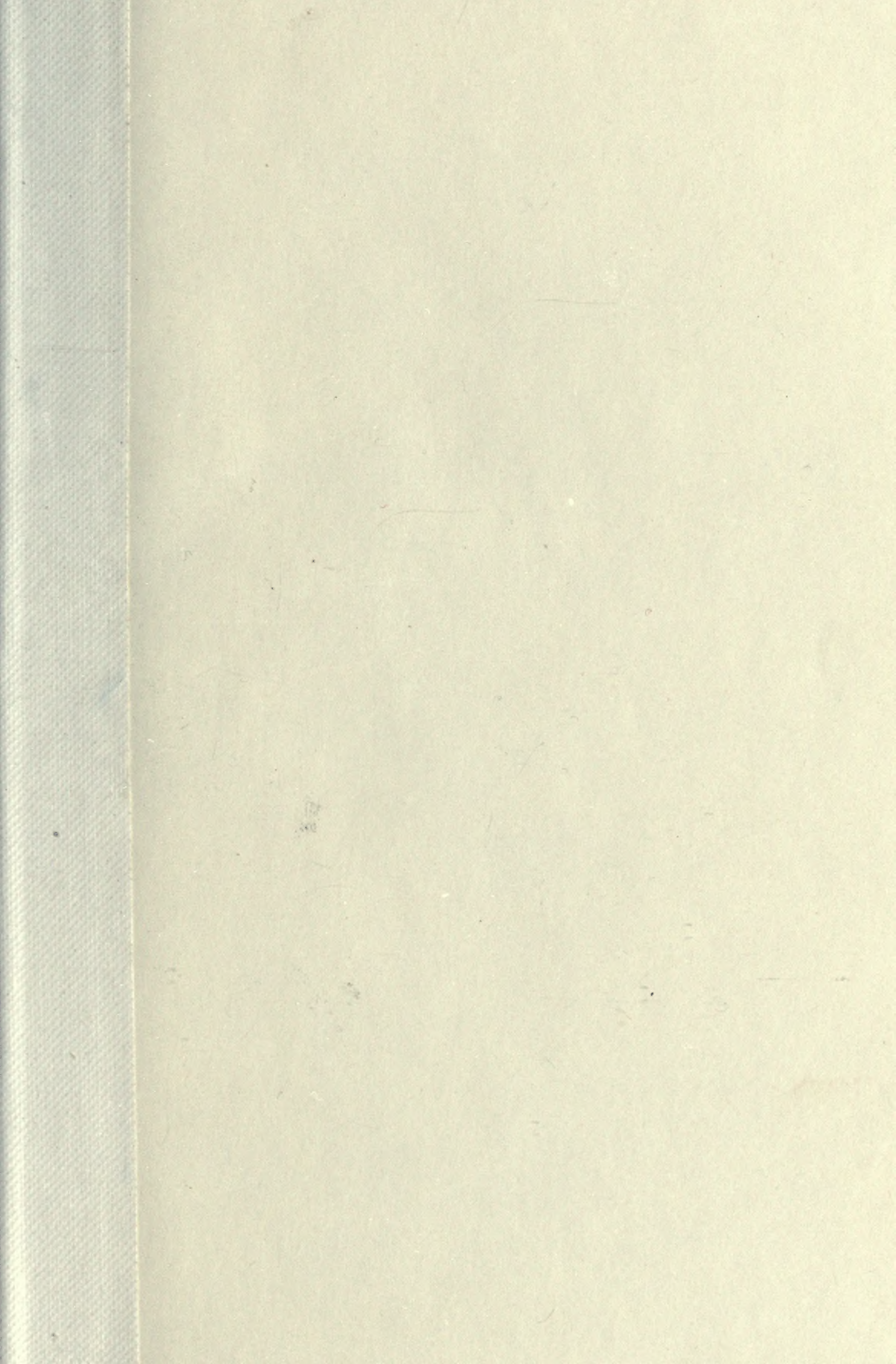
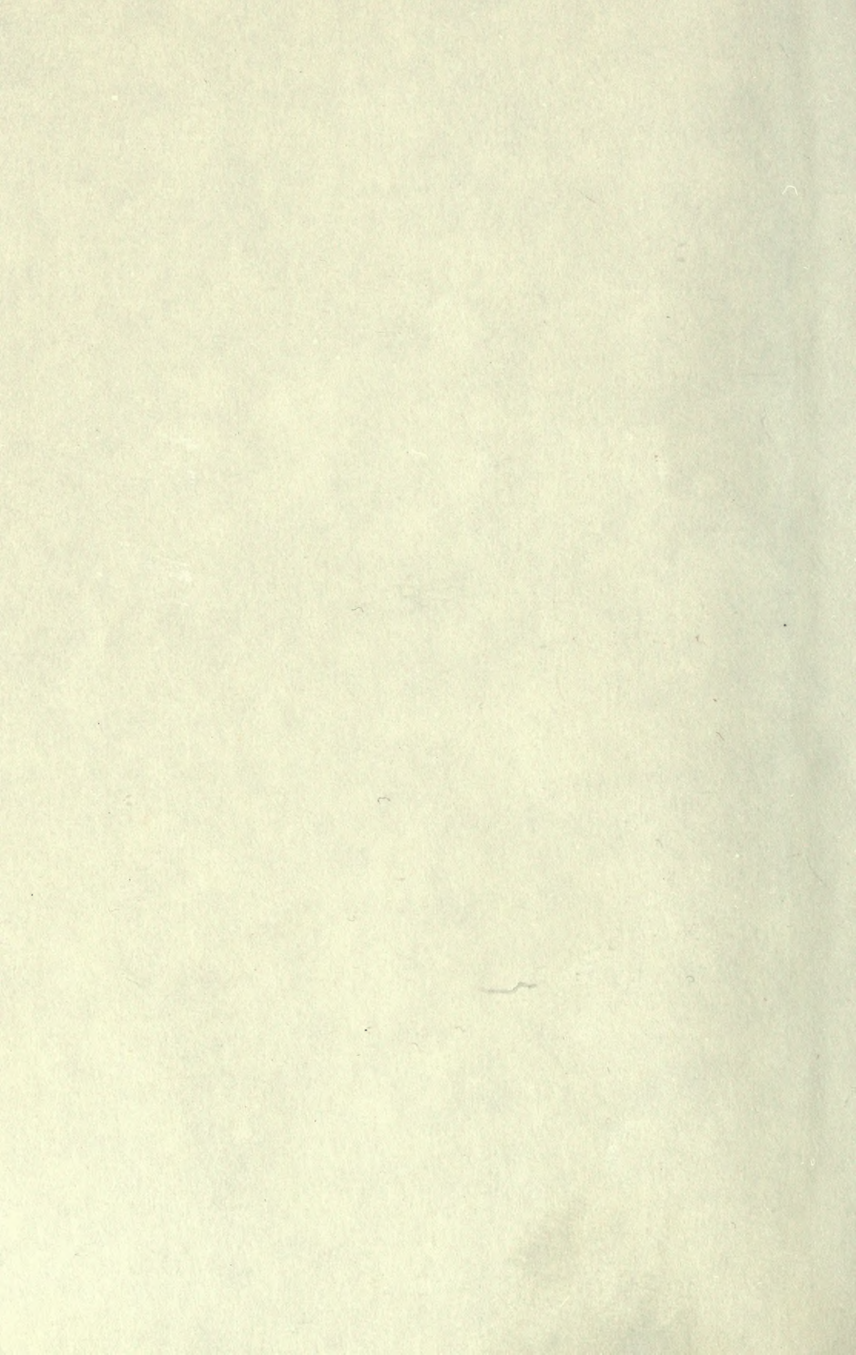

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01197513 3









Sammlung Schubert XXIX

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen

von

Rektor Dr. V. Kommerell in Nürtingen und Prof. Dr. K. Kommerell in Stuttgart

I. Band

Zweite Auflage

Mit 19 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1909

Paul Dünnhaupt, Cöthen i. Anh

Vorwort zur ersten Auflage.

In den hier vorliegenden zwei Bänden der „Sammlung Schubert" haben wir, entsprechend dem Zweck dieser Sammlung, die allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen in einer leicht verständlichen und doch wissenschaftlich strengen Weise zu behandeln gesucht. Demgemäß wurde bei der Darstellung und Beweisführung nicht in erster Linie auf Kürze und Eleganz Bedacht genommen, sondern derjenige Weg gewählt, der sich dem Verständnis des Lesers am besten anzupassen schien; nach demselben Gesichtspunkt wurde bald die analytische, bald die geometrische Darstellung bevorzugt, oft auch der analytische Beweis durch eine geometrische Veranschaulichung vorbereitet. Die Entwicklungen sind an geeigneten Beispielen illustriert; außerdem ist jedem Abschnitt eine größere Anzahl von Übungsaufgaben beigefügt, und zwar wurden hauptsächlich solche ausgewählt, die zugleich ein allgemeineres theoretisches Interesse bieten. An Vorkenntnissen dürfte zum Studium des Buches etwa erforderlich sein: die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, einschließlich der Gebilde zweiten Grades, die Infinitesimalrechnung und ihre Anwendung auf ebene Kurven, sowie die wichtigsten Sätze über Differentialgleichungen (S. S. VIII, IX, X, XI, XIII, XXV).

Der Stoff wurde in vier Abschnitte gegliedert, von denen je zwei einen Band bilden. Im ersten Band werden die Raumkurven (I. Abschnitt) und die krummen Flächen in rechtwinkligen Koordinaten (II. Abschnitt) behandelt; der zweite Band enthält als I. Abschnitt die Flächen in der Gaußschen Parameterform und weitere hier sich anschließende Probleme; im II. Abschnitt desselben werden besondere Flächengattungen untersucht und die Grundzüge

der Theorie der Strahlensysteme entwickelt. — Am Schlusse jedes Bandes wurde noch ein alphabetisches Sachregister beigefügt, um eine rasche Orientierung über einzelne Fragen zu erleichtern. Der Leser dürfte so in dem Buche wohl alles finden, was zum Studium größerer Werke (Darboux, Bianchi), sowie zum Verständnis der Originalarbeiten erforderlich ist. — Die Figuren sind in parallel-perspektivischer Darstellung gezeichnet; einzelne derselben (Nr. 14 und 30) verdanken wir der Firma M. Schilling in Halle, die uns in entgegenkommendster Weise die Klischees zu den Abbildungen ihres Katalogs zur Verfügung gestellt hat. Wir möchten nicht unterlassen, auf das vortreffliche Anschauungsmaterial hinzuweisen, das die mathematischen Modelle der genannten Firma gerade auch für unser Gebiet bilden.

Herr Professor Dr. Stahl an der Universität Tübingen hat uns bei unserer Arbeit, sowohl in bezug auf die Anlage des Ganzen, wie auf die Ausführung im einzelnen, aufs eingehendste mit seinem Rat unterstützt, wofür ihm auch an dieser Stelle unser aufrichtigster Dank gesagt sei. Desgleichen sind wir Herrn Professor Dr. v. Brill in Tübingen für die gütigst erteilte Erlaubnis zur Benutzung seiner Vorlesung über Krümmungstheorie zu großem Dank verpflichtet.

Reutlingen / Heilbronn, Januar 1903. **Die Verfasser.**

Vorwort zur zweiten Auflage.

Vom ersten Band unserer „Raumkurven und Flächen“ ist sechs Jahre nach dem Erscheinen der ersten eine zweite Auflage notwendig geworden. Wir glauben hierin einen Beweis dafür sehen zu dürfen, daß wir mit der Gesamtanlage und mit der Art der Darstellung das Richtige getroffen haben; hieran wurde daher auch nichts geändert. Dagegen haben wir im einzelnen vielfach die bessernde Hand angelegt: Kleine Ungenauigkeiten wurden beseitigt, manche Entwicklungen, die etwas zu knapp erschienen, wurden klarer und ausführlicher gefaßt, auch verschiedene Figuren neu gezeichnet. Besonders wurden die Aufgaben sorgfältig durchgesehen und auf ihre Schwierigkeit geprüft; wo diese es zu erfordern schien, wurde eine kurze Anleitung zur Lösung beigefügt. Neu aufgenommen wurde namentlich ein Abschnitt über Planevolventen, eine genauere Untersuchung über das Verhalten der Krümmungslinien in Kreispunkten und sonst noch einiges. — Da mehrfach Literaturnachweise vermißt wurden, haben wir solche, soweit es sich um Originalabhandlungen handelt, beigefügt.

Nürtingen / Stuttgart, Juli 1909. **Die Verfasser.**

Als Quellen wurden benutzt:

Bianchi, „Vorlesungen über Differentialgeometrie". Deutsch von Lukat, Leipzig 1899.

Brill, „Vorlesungen über Krümmungstheorie". (Manuskript.)

Darboux, „Leçons sur la theorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal". I.—IV. partie, Paris 1887—1896.

Gauß, „Disquisitiones generales circa superficies curvas". Werke, Bd. IV.

Gauß, „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird." Werke, Bd. IV.

Joachimsthal, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung". 3. Aufl. bearb. v. Natani. Leipzig 1890.

Killing, „Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung". Leipzig 1885.

Knoblauch, „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen." Leipzig 1888.

Lamé, „Leçons sur les coordonnées curvilignes". Paris 1859.

Laurent, „Traité d'analyse". Bd. VII. Paris 1891.

Lilienthal, „Vorlesungen über Differentialgeometrie". Bd. I Leipzig 1908.

Salmon-Fiedler, „Analytische Geometrie des Raumes." II. Teil. Leipzig. 3. A. 1880.

Scheffers, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie." Leipzig 1902.

Stahl-Kommerell, „Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie." Leipzig 1893.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Es mögen hier zunächst einige Sätze und Formeln, hauptsächlich aus der analytischen Geometrie des Raumes, die später benützt werden, im Zusammenhang vorangestellt werden.

1. Der Abstand r zweier Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) ist bestimmt durch die Gleichung

$$(1) \qquad r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

2. Sind α, β, γ die Richtungskosinus einer Geraden, d. h. die Kosinus ihres Neigungswinkels gegen die Koordinatenachsen, so ist

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

3. Eine Gerade durch den Punkt x_1, y_1, z_1 mit den Richtungskosinus α, β, γ hat die Gleichungen

$$(3) \qquad (x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) = \alpha : \beta : \gamma$$

oder

$$(4) \qquad (x - x_1) = \rho\alpha, \quad y - y_1 = \rho\beta, \quad z - z_1 = \rho\gamma.$$

Der Parameter ρ bedeutet hierbei den Abstand des variabeln Punktes (x, y, z) von dem festen (x_1, y_1, z_1).

4. Die Gleichung einer Ebene durch (x_1, y_1, z_1) senkrecht zu der Richtung α, β, γ ist

$$(5) \qquad (x - x_1)\,\alpha + (y - y_1)\,\beta + (z - z_1)\,\gamma = 0.$$

(3) oder (4) stellt also die Normale dieser Ebene dar.

5. Der Winkel v zweier Geraden mit den Richtungskosinus α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 ist bestimmt durch

$$\cos v = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2, \tag{6}$$

oder

$$4 \sin^2 \frac{v}{2} = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2. \tag{7}$$

Stehen die beiden Geraden aufeinander senkrecht, so ist

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0. \tag{8}$$

6. Der Winkel dv zweier Geraden, die in ihrer Richtung unendlich wenig verschieden sind, und die Richtungskosinus α, β, γ, bezw. $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ haben, ist bestimmt durch

$$dv^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2. \tag{9}$$

7. Die kürzeste Entfernung e zweier Geraden

$$(x - x_1) : (y - y_1) : (z - z_1) = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1,$$
$$(x - x_2) : (y - y_2) : (z - z_2) = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2,$$

ist bestimmt durch

$$e = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y_1 - y_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ z_1 - z_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sin v.}, \tag{10}$$

wo v den Winkel der zwei Geraden bedeutet.

8. Zwischen den neun Richtungskosinus α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν dreier aufeinander senkrechten Richtungen bestehen sechs Relationen, die in zwei verschiedenen Formen geschrieben werden können, nämlich:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, & l\lambda + m\mu + n\nu &= 0, \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1, & \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma &= 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1, & \alpha l + \beta m + \gamma n &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha^2 + l^2 + \lambda^2 &= 1, & \alpha\beta + lm + \lambda\mu &= 0, \\ \beta^2 + m^2 + \mu^2 &= 1, & \beta\gamma + mn + \mu\nu &= 0, \\ \gamma^2 + n^2 + \nu^2 &= 1, & \gamma\alpha + nl + \nu\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

9. Sind die drei in 8. genannten Richtungen so orientiert, wie die positiven Koordinatenachsen, so ist

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = +1,$$

und weiter

$$(14)\qquad \begin{aligned} \alpha &= m\nu - n\mu, & l &= \mu\gamma - \nu\beta, & \lambda &= \beta n - \gamma m, \\ \beta &= n\lambda - l\nu, & m &= \nu\alpha - \lambda\gamma, & \mu &= \gamma l - \alpha n, \\ \gamma &= l\mu - m\lambda, & n &= \lambda\beta - \mu\alpha, & \nu &= \alpha m - \beta l. \end{aligned}$$

Sind also zwei dieser Richtungen gegeben, so bestimmt sich die dritte eindeutig aus (14).

10. Erster Determinantensatz.

Es ist für sechs beliebige Größen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

11. Zweiter Determinantensatz.

Sind drei Variabeln x, y, z durch zwei lineare homogene Gleichungen verbunden:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0,$$

so ist

$$(16)\qquad x:y:z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

wofür abgekürzt geschrieben wird

$$(17)\qquad x:y:z = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|.$$

12. Zwei Funktionen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ von zwei Variabeln sind dann und nur dann unabhängig voneinander, wenn die sog. Funktionaldeterminante

$$\Delta^{\varphi,\psi}_{x,y} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet.

I. Abschnitt.

Die Raumkurven.

§ 1. Gleichungen der Raumkurve. Die Schraubenlinie des Kreiszylinders.

Eine Kurve entsteht durch Bewegung eines Punktes. Sie heißt eine ebene Kurve, wenn alle ihre Punkte in einer Ebene liegen; andernfalls eine Raumkurve oder eine Kurve doppelter Krümmung. Letztere Bezeichnung erklärt sich später.

Eine Raumkurve wird analytisch dargestellt durch drei Gleichungen, welche die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes P der Kurve als Funktionen einer veränderlichen Größe, des „Parameters“ u, angeben:

$$(1) \qquad x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u).$$

Die Funktionen f, φ, ψ seien für alle Werte von u innerhalb eines gewissen Gebietes stetig und differenzierbar.*) Die Bedeutung des Parameters kann verschieden sein: stellt z. B. u die Zeit vor, so geben die Gleichungen (1) für jeden beliebigen Zeitpunkt die Lage des beweglichen Punktes an.

Eine Kurve gestattet beliebig viele Darstellungen der Form (1); führt man z. B. in (1) statt u den Parameter v vermittelst der Gleichung

$$u = \chi(v)$$

ein, so sind jetzt x, y, z Funktionen des Parameters v.

Eine Raumkurve kann indes auch definiert werden als Schnitt zweier Flächen:

$$(2) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Sieht man beispielsweise x als Parameter an, so ergeben sich aus (2) y und z als Funktionen des veränderlichen Parameters x.

*) Dasselbe soll ein für allemal von allen in diesem Buche auftretenden Funktionen vorausgesetzt sein.

Man kann von (1) wie von (2) noch andere Gleichungen der Raumkurve ableiten: eliminiert man nämlich aus je zwei der Gleichungen (1) den Parameter u, so erhält man drei Gleichungen von der Form:

$$(3) \qquad F(y, z) = 0, \quad \Phi(z, x) = 0, \quad \Psi(x, y) = 0.$$

Eben solche Gleichungen erhält man aus (2), wenn man der Reihe nach x, y, z eliminiert. Jede dieser Gleichungen stellt wieder eine Fläche dar, und zwar eine Zylinderfläche, da jede nur zwei der Variabeln x, y, z enthält. Die drei durch (3) dargestellten Zylinder gehen alle durch die Raumkurve (1) oder (2) und projizieren dieselbe auf die drei Koordinatenebenen.

Bemerkung. Die Gleichungen (1) und (2) sind nicht immer vollständig äquivalent, insofern (2) unter Umständen noch Kurvenzweige enthält, die in (1) nicht auftreten.

Es stellen z. B. die Gleichungen

$$x = u, \; y = u^2, \; z = u^3$$

eine Raumkurve dritter Ordnung dar; aus diesen Gleichungen lassen sich folgende zwei leicht herleiten:

$$y = x^2, \; xz = y^2.$$

Diese beiden enthalten aber nicht bloß die Raumkurve dritter Ordnung, sondern auch noch die z-Achse. Wir sehen also an diesem Beispiel, daß nicht jede Raumkurve als vollständiger Schnitt von zwei Flächen darstellbar ist. Von den Gleichungen (2) kann man auf die Form (1) übergehen, wenn man eine der Variabeln, etwa x, gleich einer beliebigen Funktion von u setzt (am einfachsten u selber); aus (2) ergeben sich dann y und z durch Auflösen als Funktionen von u. Es folgt daraus, daß eine und dieselbe Raumkurve sich auf unendlich viele Arten sowohl in der Form (1) als in der Form (2) analytisch darstellen läßt.

Wir geben als Beispiel die Herleitung der Gleichungen der Schraubenlinie auf dem Kreiszylinder. Die Gleichung des letzteren sei

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$

oder in Polarkoordinaten

$$x = a \cos u, \; y = a \sin u.$$

Die Schraubenlinie ist nun definiert als diejenige Kurve auf dem Zylinder, die alle Mantellinien unter demselben konstanten Winkel schneidet. Daraus folgt, daß bei der Abwicklung des Zylinders in eine Ebene die Schraubenlinie in eine Gerade übergeht. Die Schraubenlinie sei nun durch den Punkt A (siehe Fig. 1) gelegt, in welchem die positive x-Achse den Zylinder schneidet. Ist P ein beliebiger Punkt der Schraubenlinie, P' seine Projektion auf die xy-Ebene, so bilden die Punkte APP' nach der Abwicklung ein rechtwinkliges Dreieck $A'PP'$, dessen Winkel $A'PP'$ für alle Punkte der Schraubenlinie derselbe ist. Bezeichnen wir ihn mit δ, so ist

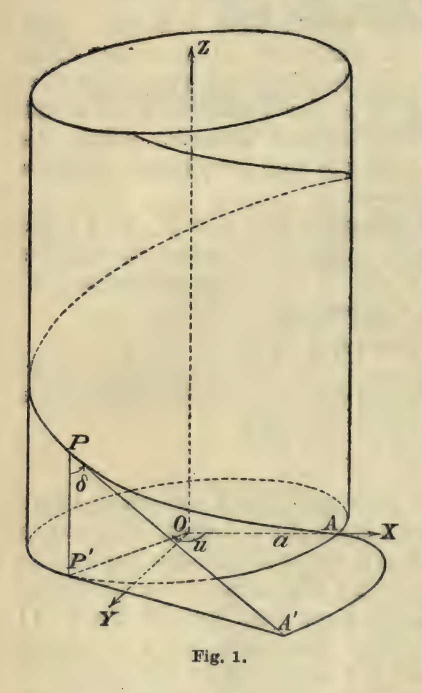


Fig. 1.

$$PP' = A'P' \operatorname{ctg} \delta .$$

Es ist aber $PP' = z$, $A'P' = au$, wenn der Winkel $AOP' = u$ in analytischem Maß gegeben ist, und wir erhalten so schließlich als Gleichungen der Schraubenlinie

$$(5) \qquad x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = au \operatorname{ctg} \delta .$$

Den Parametern u und $u + 2\pi$ entsprechen dieselben Werte von x und y, demnach zwei senkrecht übereinanderliegende Punkte der Schraubenlinie. Zwei solche haben stets denselben Abstand, nämlich

$$h = 2a\pi \operatorname{ctg} \delta .$$

Die Größe h heißt die Ganghöhe der Schraubenlinie. Durch Elimination von u aus je zwei der Gleichungen (5) erhält man die Projektionen der Schraubenlinie auf die Koordinatenebenen, nämlich

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x = a \cos\left(\frac{z \operatorname{tg} \delta}{a}\right), \quad y = a \sin\left(\frac{z \operatorname{tg} \delta}{a}\right).$$

Diese Projektionen sind der Reihe nach ein Kreis, eine Kosinuslinie und eine Sinuslinie.

§ 2. Bogenelement, Tangente und Normalebene einer Raumkurve.

Die Raumkurve sei wieder gegeben durch die Gleichungen

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u). \tag{1}$$

Man erhält ihre Eigenschaften in der Umgebung eines ihrer Punkte P durch Untersuchung der einfachsten geometrischen Gebilde, die durch P und die auf P folgenden unendlich benachbarten Punkte P', P'', ... bestimmt werden. Beschränkt man sich zunächst auf die Punkte P und P', so erhält man das Bogenelement, die Tangente und die Normalebene im Punkt P. Zu ihrer analytischen Darstellung braucht man nur die ersten Differentiale von x, y, z; diese sind

$$dx = f'(u)\,du, \quad dy = \varphi'(u)\,du, \quad dz = \psi'(u)\,du. \tag{2}$$

Erklärung. Unter dem Bogenelement oder Linienelement der Kurve im Punkt P versteht man die unendlich kurze Verbindungsstrecke der zwei Nachbarpunkte P und P'; sie wird bezeichnet mit $ds = PP'$.

Sind u und $u + du$ die Parameter, x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Koordinaten von P und P', so sind dx, dy, dz die Projektionen von ds auf die Achsen, und ds berechnet sich als Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedons (s. Fig. 2), dessen Kanten dx, dy, dz sind. Daher hat man für das Bogenelement ds im Punkte P

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{3}$$

oder nach (2)

$$ds = du \sqrt{f'(u)^2 + \varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2}. \tag{4}$$

Wegen der Quadratwurzel hat ds zunächst noch ein doppeltes Vorzeichen. Wir bestimmen dasselbe durch die Festsetzung, daß der Bogen s mit dem Parameter u wachsen, also $ds : du$ positiv sein soll. Der Quadratwurzel ist alsdann stets das positive Vorzeichen zu geben.

Damit wird zugleich die eine Fortschreitungsrichtung auf der Kurve von P aus, und zwar diejenige, in welcher u (also auch s) zunimmt, als positive, die andere als negative festgelegt.

Um die Richtung des Bogenelements ds zu bestimmen, bezeichnen wir mit α, β, γ die Richtungskosinus desselben. Es ist dann (s. Fig. 2)

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Fig. 2.

Um diese Werte durch den Parameter u auszudrücken, hat man nur die Werte dx, dy, dz und ds aus (2) und (4) einzusetzen.

An (3) und (4) schließt sich noch eine Bemerkung an: man erhält die Bogenlänge s eines endlichen Stückes der Raumkurve zwischen zwei Punkten P_0 und P_1, deren Parameter u_0 und u_1 sind, indem man das Differential ds in (4) zwischen den Grenzen u_0 und u_1 integriert; es ergibt sich

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{f'(u)^2 + \varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2}\, du. \tag{6}$$

Erklärung. Die Tangente der Raumkurve im Punkt P ist die Gerade, welche durch P und P' geht.*)

Lassen wir die positive Richtung der Tangente mit der oben definierten Fortschreitungsrichtung der Kurve in P zusammenfallen, so sind die Richtungskosinus der Tangente die in (5) bereits bestimmten Größen α, β, γ. Sind daher X, Y, Z die laufenden Koordinaten der Tangente, und ist v der in der positiven Richtung gemessene Abstand des Punktes X, Y, Z von x, y, z, so sind die Gleichungen der Tangente (vgl. Einl. (4))

$$(7) \qquad X - x = v\alpha, \quad Y - y = v\beta, \quad Z - z = v\gamma,$$

oder durch Elimination von v unter Berücksichtigung von (5)

$$(8) \quad (X - x):(Y - y):(Z - z) = \alpha : \beta : \gamma = dx : dy : dz.$$

Erklärung. Die durch P gehende, zur Tangente senkrechte Ebene heißt die Normalebene**) der Kurve in P, jede durch P gehende, in der Normalebene liegende Gerade eine Normale der Kurve.

Die Gleichung der Normalebene in X, Y, Z als laufenden Koordinaten ist nach Einl. (5)

$$(9) \qquad (X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma = 0,$$

oder nach Gl. (5)

$$(10) \quad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0.$$

Für x, y, z bezw. dx, dy, dz kann man hier noch die Werte in u aus (1), und (2) einsetzen.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an:

1. Ist der Parameter die Bogenlänge s, sind also die Koordinaten eines Punktes der Raumkurve als Funktion des von einem bestimmten Punkte ab gemessenen Bogens gegeben, so sind die Größen α, β, γ direkt die Differentialquotienten der Koordinaten x, y, z nach s. Setzen wir unter dieser Voraussetzung zur Abkürzung

$$(11) \qquad \frac{dx}{ds} = x', \quad \frac{dy}{ds} = y', \quad \frac{dz}{ds} = z',$$

---

*) In Fig. 2 mit PT bezeichnet.

**) In Fig. 2 mit N bezeichnet.

so erhält man für die Richtungskosinus der Tangente

$$\alpha = x', \quad \beta = y', \quad \gamma = z'.$$

Es ist also nach Einl. (2)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \tag{12}$$

Die Gleichungen der Tangente lauten

$$X - x = v x', \quad Y - y = v y', \quad Z - z = v z' \tag{13}$$

oder

$$(X - x) : (Y - y) : (Z - z) = x' : y' : z'. \tag{14}$$

Die Gleichung der Normalebene wird

$$(X - x)\, x' + (Y - y)\, y' + (Z - z)\, z' = 0. \tag{15}$$

2. Ist die Kurve als Schnitt zweier Flächen gegeben in der Form:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \tag{16}$$

so müssen die Koordinaten $x + dy$, $y + dy$, $z + dz$ des Punktes P' die beiden Gleichungen (16) befriedigen, d. h. es müssen nach dem Taylorschen Satz die Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der Differentiale $dx : dy : dz$ bestimmen. Man erhält nach Einl. (17)

$$dx : dy : dz = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{matrix} \right\|. \tag{18}$$

Hiernach ließen sich die Gleichungen der Tangente und Normalebene aus (8) und (10) leicht herleiten. Statt dessen kann man aber auch umgekehrt in den Gleichungen (17) für dx, dy, dz die ihnen proportionalen Werte $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ aus (8) einsetzen und erhält so die Gleichungen der Tangente in der Form

$$(19) \quad \begin{aligned} (X-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial F_1}{\partial z}=0\,, \\ (X-x)\frac{\partial F_2}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F_2}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial F_2}{\partial z}=0\,. \end{aligned}$$

Jede dieser beiden Gleichungen stellt eine Ebene dar, und zwar, wie sich im II. Abschnitt zeigen wird, die Tangentialebene der Fläche $F_1 = 0$ oder $F_2 = 0$ im Punkte P. Die Tangente der Raumkurve ist somit, wie auch geometrisch einleuchtet, die Schnittgerade der Tangentialebenen der beiden Flächen in dem betreffenden Punkte.

3. Die (später zu benutzende) Mittellotebene der Strecke PP' fällt in der Grenze (d. h. wenn PP' unendlich klein wird) mit der Normalebene des Punktes P zusammen. Denn die Gleichung der Mittellotebene zweier Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) ist

$$\left(X-\frac{x_1+x_2}{2}\right)(x_1-x_2)+\left(Y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)(y_1-y_2) + \left(Z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)(z_1-z_2)=0\,.$$

Setzt man hier für x_1, y_1, z_1, die Koordinaten von P, nämlich x, y, z, für x_2, y_2, z_2 die von P', nämlich $x+dx, y+dy, z+dz$, so erhält man, wenn die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung vernachlässigt werden,

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0\,,$$

d. h. nach (10) die Gleichung der Normalebene in P.

§ 3. Schmiegungsebene, Krümmungskreis, sphärische Abbildung der Raumkurve.

Wir untersuchen nun weiter die einfachsten Gebilde, die durch drei konsekutive Kurvenpunkte P, P', P'' bestimmt sind. Es sind dies eine Ebene und ein Kreis. Zu ihrer analytischen Darstellung bedürfen wir zunächst die Koordinaten des Punktes P''. Diese sind

$$x+2\,dx+d^2x,\;\; y+2\,dy+d^2y,\;\; z+2\,dz+d^2z.$$

Die zweiten Differentiale d^2x, d^2y, d^2z sind hierbei bestimmt durch die Gleichungen

(1) $d^2x = f''(u)\,du^2,\quad d^2y = \varphi''(u)\,du^2,\quad d^2z = \psi''(u)\,du^2;$

ferner folgt aus § 2, Gl. (3) durch Differenzieren

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z. \tag{2}$$

An die Definitionen des § 2 schließen sich hier noch folgende (vgl. Fig. 3) an:

Schmiegungsebene (S) der Raumkurve im Punkte P heißt die durch drei aufeinanderfolgende Punkte P, P', P'' gelegte Ebene; in dieser Ebene liegen natürlich die Tangente in P und die in P'.

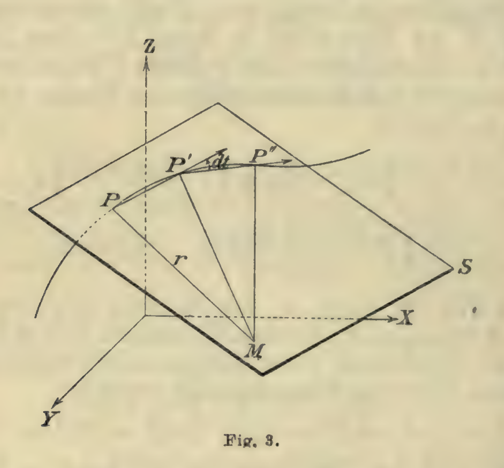


Fig. 3.

Krümmungskreis der Raumkurve im Punkte P heißt der durch drei aufeinanderfolgende Punkte P, P', P'' gehende, in der Schmiegungsebene von P liegende Kreis; der Radius desselben heißt der Krümmungsradius der Raumkurve im Punkte P.

Um die Gleichung der Schmiegungsebene aufzustellen, gehen wir aus von der allgemeinen Gleichung einer Ebene durch den Punkt $P(x,y,z)$

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0. \tag{3}$$

Sollen P' und P'' auch in dieser Ebene liegen, so müssen die Koordinaten dieser Punkte, für X, Y, Z eingesetzt, die Gleichung (3) befriedigen. Es muß also sein

(4) $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0\,,$

$A(2dx + d^2x) + B(2dy + d^2y) + C(2dz + d^2z) = 0.$

Letztere Gleichung reduziert sich vermöge (4) auf

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0. \tag{5}$$

Durch Elimination von A, B, C aus (3), (4) und (5) erhält man als Gleichung der Schmiegungsebene im Punkte $P(x,y,z)$

$$\begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \\ Y - y & dy & d^2y \\ Z - z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Hier können wieder die Differentiale nach § (2), Gl. (2) und Gl. (1) dieses Paragraphen durch die Ableitungen der Funktionen f, φ und ψ nach u ersetzt werden.

Der Krümmungsradius einer Raumkurve im Punkt P wird ganz ebenso bestimmt wie bei einer ebenen Kurve. Der unendlich kleine Winkel zweier aufeinanderfolgenden Tangenten in P und P' heißt der Kontingenzwinkel. Bezeichnen wir diesen mit dt, den Krümmungsradius mit r, so ist, wie aus der Lehre von den ebenen Kurven bekannt ist

$$\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds}. \tag{7}$$

Da dt der Winkel zwischen den beiden Richtungen α, β, γ und $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ ist, so hat man nach Einl. (9) für den Kontingenzwinkel dt

$$dt^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2, \tag{8}$$

und somit für den Krümmungsradius r im Punkte P nach (7)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2}. \tag{9}$$

Durch Differenzieren der Gleichungen (5) in § (2) kann Gl. (9) unter Berücksichtigung von (2) in die Form gebracht werden

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}{ds^4}. \tag{10}$$

Für den Krümmungsradius nehmen wir stets den positiven Wert, der sich aus (9) oder (10) ergibt.

Ist der Parameter der Kurvenbogen s, und setzen wir

$$\frac{d^2x}{ds^2} = x'', \quad \frac{d^2y}{ds^2} = y'', \quad \frac{d^2z}{ds^2} = z'',$$

so erhalten wir, da jetzt $d^2 s = 0$, für den Krümmungsradius die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2. \tag{11}$$

Der Mittelpunkt M des Krümmungskreises heißt der Krümmungsmittelpunkt (M in Fig. 4); die Größe $\frac{1}{r}$ die Krümmung der Raumkurve im Punkt P, oder auch spezieller die erste Krümmung im Gegensatz zu der später zu behandelnden zweiten Krümmung oder Torsion.*)

Bemerkung. Die Gleichung (7), die der Theorie der ebenen Kurven entlehnt wurde, möge noch kurz hergeleitet werden. Da r der Radius des dem Dreieck $P\,P'\,P''$ umbeschriebenen Kreises ist, so hat man

$$2r = \frac{PP''}{\sin dt}$$

oder

$$4r^2 = \frac{(2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2}{\sin^2 dt}.$$

Berücksichtigt man im Zähler und Nenner nur die Glieder niedrigster Ordnung, so folgt:

$$r^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds}.$$

Die Formeln (7) und (8) gestatten eine geometrische Interpretation. Beschreibt man nämlich um den Ursprung O des Koordinatensystems eine Kugel mit dem Radius 1, die sogenannte „Einheitskugel“ und zieht zu der positiven

---

*) Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungsebene, wegen § 2, Schluß aber auch in der Normalebene von P: er liegt daher auf der Schnittgeraden der Schmiegungsebene und Normalebene von P (Hauptnormale, s. § 4).

Tangente eines Kurvenpunktes P die Parallele durch O bis zum Schnitt mit der Kugel in P_1, so entspricht jedem Punkt der Kurve ein Punkt der Kugel, und der ganzen Raumkurve K eine Kurve K_1 auf der Kugel. Man nennt den Punkt P_1 das sphärische Bild des Punktes P*) und die Kurve K_1 das sphärische Bild der Kurve K.**) Sind x, y, z die Koordinaten von P, so sind offenbar α, β, γ die seines Bildes P_1, und für beide Punkte hat der Parameter u denselben Wert. Dem Parameter $u + du$ entspricht auf der Kurve ein Punkt P' mit den Koordinaten $x + dx, y + dy, z + dz$, auf der Kugel ein Punkt P_1' mit den Koordinaten $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma$. Dem Bogenelement PP' auf der Kurve entspricht des Bogenelement $P_1 P_1'$ auf der Kugel, und es ist

$$P_1 P_1' = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = dt$$

d. h. das sphärische Bild des Bogenelements ist gleich dem Kontingenzwinkel. Daraus erhält man als geometrische Deutung der Gleichung (7) den

Satz. Die Krümmung einer Raumkurve in einem Punkte P ist gleich dem Verhältnis des sphärischen Bildes (dt) des Linienelements zu diesem Linienelement (ds) selbst.

§ 4. Das die Raumkurve begleitende Dreikant. Krümmungsmittelpunkt.

Die Normalebene (§ 2) und die Schmiegungsebene (§ 3) in einem Punkte der Raumkurve führen naturgemäß zu einer dritten Ebene, nämlich zu der, welche auf den beiden ersten senkrecht steht. Wir definieren daher:

---

*) Die Einführung der sphärischen Abbildung in die Geometrie wird gewöhnlich Gauß zugeschrieben; indessen gebührt Euler das Verdienst, diese Methode als Erster angewendet zu haben. S. Eulers Abhandlung: „Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi". Act. Petr. 1782. I, p. 19—57. Vgl. auch Cantors Geschichte der Mathematik Bd. IV, Artikel XXIV, p. 527.

**) Die Bezeichnung „sphärisches Bild" ist hier im engeren Sinne gebraucht. Man kann, wie wir später (§ 9) sehen werden, auch mit Hilfe der Hauptnormalen oder Binormalen eine sphärische Abbildung herstellen.

Rektifizierende Ebene im Punkt P einer Raumkurve heißt die Ebene durch P, welche zur Normalebene und zur Schmiegungsebene senkrecht steht; dieselbe geht natürlich durch die Tangente in P. Der Name erklärt sich später (§ 11, Schluß).

Die drei Ebenen schneiden sich in drei zueinander senkrechten Geraden. Die eine ist die Tangente, die andern nennt man die Hauptnormale bezw. Binormale.

Die Tangente ist der Schnitt der Schmiegungsebene und der rektifizierenden Ebene.

Die Hauptnormale (Normale in der Schmiegungsebene) ist der Schnitt der Normalebene und der Schmiegungsebene.

Die Binormale (Normale senkrecht zur Schmiegungsebene) ist der Schnitt der Normalebene und der rektifizierenden Ebene.

In jedem Punkt hat man also ein aus drei rechten Winkeln gebildetes Dreikant (Trieder), das die Raumkurve begleitet, gebildet von der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen des Punktes P, und es sollen nun zunächst die Richtungskosinus der drei Kanten und die Gleichungen der drei Ebenen dieses Dreikants aufgestellt werden, soweit dies nicht schon geschehen ist. Diese Richtungskosinus seien

für die Tangente: α, β, γ,

(1) für die Hauptnormale: l, m, n,

für die Binormale: λ, μ, ν.

Wir setzen ferner fest, daß die positiven Richtungen der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale ebenso orientiert seien, wie die positive x-, y- und z-Achse. Die positive Richtung der Tangente wurde bereits in § 2, S. 9 bestimmt; die Hauptnormale geht nach § 3, S. 14 durch den Krümmungsmittelpunkt der Kurve; wir definieren nun als die positive Richtung der Hauptnormale die Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt. Die positive Richtung der Binormalen endlich ist nach obiger Festsetzung zu der der Tangente und Hauptnormale ebenso orientiert, wie die positive Richtung der z-Achse zur positiven x- und y-Achse. Vgl. Fig. 4, wo die Trieder für die Punkte P und P' gezeichnet sind. PT, PH und PB bezeichnen die Tangente, Hauptnormale und Binormale,

S, N, R die Schmiegungs-, Normal- und rektifizierende Ebene des Punktes P; entsprechend sind die drei Geraden und Ebenen für P' bezeichnet.

Es sind nun die neun Richtungskosinus in (1) zu bestimmen. Für die Tangente war nach § 2, (5)

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{2}$$

Da die Binormale auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, so erhält man aus der Gleichung dieser Ebene, § 3, (6), wenn r zunächst einen Proportionalitätsfaktor darstellt, für die Richtungskosinus λ, μ, ν der Binormalen

$$\lambda = \frac{r}{ds^3}\left(dy\,d^2z - dz\,d^2y\right), \quad \mu = \frac{r}{ds^3}\left(dz\,d^2x - dx\,d^2z\right);$$

$$\nu = \frac{r}{ds^3}\left(dx\,d^2y - dy\,d^2x\right). \tag{3}$$

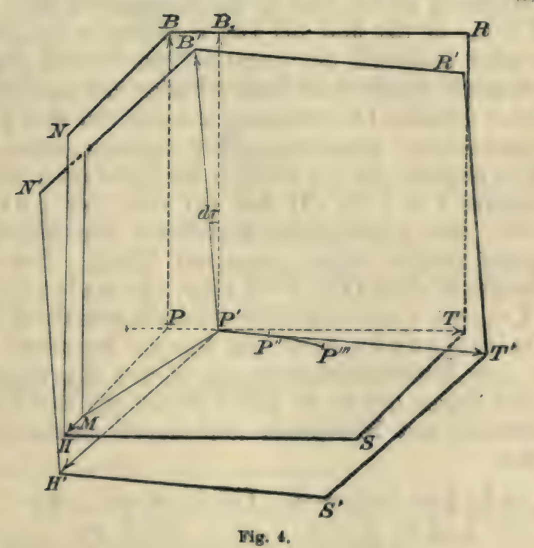


Fig. 4.

Für l, m, n erhält man nach der oben getroffenen Festsetzung und nach Einl. (14)

$$l = \mu\gamma - \nu\beta, \quad m = \nu\alpha - \lambda\gamma, \quad n = \lambda\beta - \mu\alpha.$$

Nach (2) und (3) nimmt l die Form an

$$l = \frac{r}{ds^3}\left(ds\,d^2x - dx\,d^2s\right) = r\frac{d\alpha}{ds}. \tag{4}$$

Entsprechende Gleichungen erhält man für m und n; man hat also für die Richtungskosinus l, m, n der Hauptnormale

$$l = r\frac{d\alpha}{ds}, \quad m = r\frac{d\beta}{ds}, \quad n = r\frac{d\gamma}{ds}. \tag{5}$$

Da $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ist, ergibt sich für den Proportionalitätsfaktor r

$$\frac{1}{r^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2} = \frac{dt^2}{ds^2}. \tag{6}$$

Die Übereinstimmung von (6) mit § 3, (9) lehrt, daß der oben eingeführte Proportionalitätsfaktor r dem absoluten Wert nach gleich dem Krümmungsradius ist. An und für sich kann in (3) und (4) für r entweder beidemal der positive, oder beidemal der negative, aus (6) sich ergebende Wert genommen werden. In beiden Fällen hat nach Einl. (13) das Trieder dieselbe Orientierung wie das von den positiven Koordinatenachsen gebildete. Wir nehmen nun, um die positiven Richtungen der Kanten des Trieders eindeutig zu bestimmen, für r in (3) und (4) stets den positiven Wert, oder, was dasselbe ist, r bedeutet den Krümmungsradius selbst (nicht seinen negativen Wert). Durch diese Festsetzung weist die positive Hauptnormalenrichtung in der Tat, wie oben festgesetzt wurde, nach dem Krümmungsmittelpunkt hin: um dies zu beweisen, denken wir uns den Koordinatenursprung in den Kurvenpunkt P verlegt und lassen die x-, y- und z-Achse mit der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Kurve zusammenfallen. Dann wird

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0; \quad l = 0,\ m = 1,\ n = 0;$$
$$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ \nu = 1; \quad dx = ds.$$

Aus der zweiten Gleichung (5) folgt also $d\beta = \frac{dx}{r}$. Da nun r und dx positiv sind, so ist auch $d\beta$ positiv; d. h. der Kosinus des Winkels der positiven Tangente gegen die po-

sitive y-Achse nimmt mit x zu, dieser Winkel selbst also nimmt ab, d. h. die Kurve wendet der positiven y-Achse ihrer konkave Seite zu und der Krümmungsmittelpunkt liegt bei der obigen Annahme des Koordinatensystem auf der positiven y-Achse, d. h. auf der positiven Hauptnormale, womit der Beweis erledigt ist.

Alsdann hat man für die Koordinaten X, Y, Z des Krümmungsmittelpunktes (M in Fig. 3):

$$X = x + rl, \quad Y = y + rm, \quad Z = z + rn. \tag{7}$$

Bemerkung. Es ist, im Unterschied von den ebenen Kurven, zu beachten, daß der Krümmungsmittelpunkt nicht der Schnittpunkt zweier konsekutiven Hauptnormalen ist. Diese sind vielmehr windschief, da sie in verschiedenen Ebenen, den Schmiegungsebenen der beiden Punkte, liegen, und ihre bezüglichen Schnittpunkte P und P' mit der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen, d. h. der Kurventangente, natürlich nicht zusammenfallen. Der Krümmungsmittelpunkt ist vielmehr der Schnittpunkt der Hauptnormalen von P mit der Normalebene des Nachbarpunktes P' (vgl. Fig. 4). Der analytische Beweis hierfür sei dem Leser überlassen (vgl. § 2, Schluß).

Zum Schluß stellen wir noch die Gleichungen für die Kanten und Ebenen des begleitenden Trieders zusammen. Es wurde gefunden:

Gleichungen der Tangente

$$X = x + v\alpha, \quad Y = y + v\beta, \quad Z = z + v\gamma. \tag{8}$$

Gleichungen der Hauptnormale

$$X = x + vl, \quad Y = y + vm, \quad Z = z + vn. \tag{9}$$

Gleichungen der Binormale

$$X = x + v\lambda, \quad Y = y + v\mu, \quad Z = z + v\nu. \tag{10}$$

Gleichung der Normalebene

$$(X - x)\,\alpha + (Y - y)\,\beta + (Z - z)\,\gamma = 0. \tag{11}$$

Gleichung der Schmiegungsebene

$$(X - x)\,\lambda + (Y - y)\,\mu + (Z - z)\,\nu = 0. \tag{12}$$

Gleichung der rektifizierenden Ebene

$$(X - x)\,l + (Y - y)\,m + (Z - z)\,n = 0. \tag{13}$$

Hierbei sind α, β, γ bestimmt durch (2); λ, μ, ν durch (3); l, m, n durch (5); r aus (6) mit positivem Vorzeichen.

§ 5. Torsion oder zweite Krümmung.

Die Betrachtung der einfachsten geometrischen Gebilde, die sich aus drei konsekutiven Punkten der Raumkurve, P, P', P'', ergeben, ist durch das Vorhergehende erledigt. Wie man leicht sieht, besitzt auch eine ebene Kurve alle diese Gebilde. Etwas wesentlich Neues erhalten wir aber für die Raumkurve, wenn wir noch einen vierten, dem Punkt P'' unendlich benachbarten Punkt P''' zur Betrachtung heranziehen. In der analytischen Darstellung treten außer den ersten und zweiten auch noch die dritten Differentiale der Koordinaten auf. Diese sind definiert durch die Gleichungen

$$(1) \quad d^3x = f'''(u)\,du^3,\; d^3y = \varphi'''(u)\,du^3,\; d^3z = \psi'''(u)\,du^3.$$

Die vier Punkte P, P', P'', P''' werden nun im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, sondern die Ebene durch die drei ersten Punkte P, P', P'' (Schmiegungsebene des Punktes P) und die Ebene durch die drei letzten P', P'', P''' (Schmiegungsebene des Punktes P') werden miteinander einen unendlich kleinen Winkel $d\tau$ einschließen. Derselbe ist offenbar gleich dem Winkel der Binormalen in P und P' (s. Fig. 4, wo $P'B_1 \parallel PB$). Wie nun der Kontingenzwinkel dt, d. h. der Winkel zweier konsekutiven Tangenten zur Krümmung $\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds}$ führt, so führt der Winkel $d\tau$ zum Begriff der Torsion oder zweiten Krümmung. Wir definieren:

1) Torsionswinkel des Punktes P heißt der Winkel $d\tau$ zwischen der Schmiegungsebene in P und der darauffolgenden Schmiegungsebene in P'.

2) Torsion oder zweite Krümmung in Punkt P heißt der Wert $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho}$; die Größe ρ heißt Torsionsradius.

Wie die Krümmung $\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds}$ ein Maß ist für die Abweichung der Kurve von einer Geraden, der Tangente im Punkt P, so gibt die Torsion $\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}$ ein Maß für die Abweichung der Raumkurve von einer Ebene, der Schmiegungsebene im Punkt P. Für eine ebene Kurve ist überall $d\tau = 0$;

die Torsion hat also für alle Punkte den Wert Null. Hieraus erklärt sich, warum die Raumkurven auch als „Kurven doppelter Krümmung“ bezeichnet werden. Der Name „Torsionsradius“ für ρ könnte die Meinung erwecken, als ob ρ der Radius eines Kreises wäre, der eine ähnliche geometrische Bedeutung hätte, wie der Krümmungskreis; dem ist aber nicht so: ρ ist eine rein analytische Größe.

Zur analytischen Darstellung der Torsion benutzen wir die oben gemachte Bemerkung, daß $d\tau$ auch der Winkel zweier konsekutiven Binormalen ist. Ihre Richtungskosinus sind λ, μ, ν; $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$. Nach Einl. (9) erhält man also für den Torsionswinkel $d\tau$

$$d\tau^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2. \tag{2}$$

Für den Torsionsradius ergibt sich daher

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{d\tau^2}{ds^2} = \frac{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}{ds^2}. \tag{3}$$

Die Werte der Differentiale $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sind aus § 4, (3) zu bilden, und in (2) und (3) einzuführen. Wir schlagen zu diesem Zweck folgenden Weg ein: Da nach Einl. (2) $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, also $\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0$ ist, so kann man statt (2) schreiben

$$d\tau^2 = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 & \lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu \\ \lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu & d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 \end{vmatrix}.$$

Nach Einl. (15) ist dann auch

$$d\tau^2 = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ d\mu & d\nu \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ d\nu & d\lambda \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ d\lambda & d\mu \end{vmatrix}^2. \tag{4}$$

Aus § 4, (3) erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} d\lambda &= \frac{r}{ds^3}(dy\,d^3z - dz\,d^3y) + \frac{\lambda\,ds^3}{r}\,d\left(\frac{r}{ds^3}\right), \\ d\mu &= \frac{r}{ds^3}(dz\,d^3x - dx\,d^3z) + \frac{\mu\,ds^3}{r}\,d\left(\frac{r}{ds^3}\right), \\ d\nu &= \frac{r}{ds^3}(dx\,d^3y - dy\,d^3x) + \frac{\nu\,ds^3}{r}\,d\left(\frac{r}{ds^3}\right). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Es ist nun

$$\begin{vmatrix} \mu & \nu \\ d\mu & d\nu \end{vmatrix} = \frac{r}{ds^3}\left\{ \mu\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - \nu(dz\,d^3x - dx\,d^3z) \right\};$$

setzt man hier aus § 4, (3) die Werte für μ und ν ein, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$J = \begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix}$$

gesetzt wird:

$$\begin{vmatrix} \mu & \nu \\ d\mu & d\nu \end{vmatrix} = \frac{J r^2 dt}{ds^6},$$

nebst den analogen Gleichungen, die aus dieser durch zyklische Vertauschung hervorgehen. Quadriert man diese drei Gleichungen, so folgt aus (4)

$$(6) \qquad d\tau^2 = \frac{J^2 r^4}{ds^{10}}.$$

Beim Radizieren ist nun noch eine Entscheidung über das Vorzeichen zu treffen. Während nämlich der Kontingenzwinkel dt (und damit der Krümmungsradius r) als wesentlich positiv angesehen werden konnte, ist dies beim Torsionswinkel nicht mehr der Fall. Denn für das konsekutive Bogenelement $P'P''$ sind ja zu PP' unendlich viele Lagen möglich, die einen Kegel mit dem erzeugenden Winkel dt bilden; man kann also nicht von einem Vorzeichen dieses Winkels sprechen. Für die konsekutive Schmiegungsebene dagegen sind nur zwei Lagen möglich, je nachdem sie gegen die vorangehende um das beiden gemeinsame Bogenelement $(P'P'')$ im einen oder andern Sinne um den Winkel $d\tau$ gedreht ist. Diese beiden Drehungsrichtungen sind durch das Vorzeichen zu unterscheiden und wir rechnen den Torsionswinkel $d\tau$ $\left(\text{und damit auch die Torsion } \frac{1}{\rho}\right)$ positiv, wenn die zweite Schmiegungsebene gegen die erste, in der positiven Tangentenrichtung gesehen, im Sinne des Uhrzeigers gedreht erscheint, im andern Fall als negativ. In Fig. 4 z. B. ist $d\tau$ positiv. Zufolge dieser Festsetzung ist, wie sich im folgenden Paragraphen zeigen wird, bei der

Radizierung von (6) das negative Zeichen zu wählen, und es ist also schließlich

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds} = -\frac{r^2}{ds^6} \begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix},$$

wo noch der Wert von r^2 aus § 3, (9) zu entnehmen ist.

Die Gleichung $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}$ läßt sich in ganz analoger Weise mit Hilfe der sphärischen Abbildung geometrisch deuten, wie dies am Schluß von § 3 für die Gleichung $\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds}$ geschah. Erzeugt man nämlich, wie dort mittels der Tangenten, so jetzt mittels der Binormalen ein sphärisches Bild der Raumkurve, so daß den Punkten $P, P' \ldots$ der Kurve die Punkte $P_1, P_1' \ldots$ der Einheitskugel entsprechen, so ist der Torsionswinkel $d\tau$ gleich dem Bogenelement $P_1 P_1'$ und die Torsion $\frac{1}{\varrho} = \frac{P_1 P_1'}{P P'}$.

Wir bemerken noch, daß das Bogenelement PP' der Kurve der kürzeste Abstand zwischen den zwei konsekutiven Binormalen PB und $P'B'$ ist.

§ 6. Die Formeln von Frenet. Schmiegungskugel.

In § 4 haben sich die Werte für die Richtungskosinus α, β, γ der Tangente, l, m, n der Hauptnormale, λ, μ, ν der Binormalen ergeben. Es sollen nun die Differentiale dieser Größen dargestellt werden. Wir werden so zu einem wichtigen, zuerst von Frenet, später auch von Serret aufgestellten Formelsystem gelangen. Zuvor seien jedoch die wichtigsten Formeln aus den früheren Paragraphen zusammengestellt. Es hatte sich ergeben, s. § 4, (2)–(4):

Bogenelement

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \; ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z.$$

Richtungskosinus der Tangente

$$(2) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Richtungskosinus der Hauptnormale

$$l = r\frac{d\alpha}{ds}, \quad m = r\frac{d\beta}{ds}, \quad n = r\frac{d\gamma}{ds}. \tag{3}$$

Richtungskosinus der Binormalen

$$\lambda = \frac{r}{ds^3}(dy\,d^2z - dz\,d^2y), \quad \mu = \frac{r}{ds^3}(dz\,d^2x - dx\,d^2z), \tag{4}$$

$$\nu = \frac{r}{ds^3}(dx\,d^2y - dy\,d^2x).$$

Krümmungsradius und Kontingenzwinkel

$$\frac{1}{r^2} = \frac{dt^2}{ds^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2}. \tag{5}$$

Torsionsradius und Torsionswinkel

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{d\tau^2}{ds^2} = \frac{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}{ds^2}. \tag{6}$$

Die Werte der Differentiale α, β, γ ergeben sich direkt aus (3), nämlich

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{r}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{r}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{r}. \tag{7}$$

Um $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ zu bilden, differenzieren wir die in Einl. (11) stehenden Gleichungen

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Bei der Differentiation der letzteren ist zu beachten, daß nach (7) und Einl. (11) $\lambda d\alpha + \mu d\beta + \nu d\gamma = 0$ ist. Es ergibt sich also

$$\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0,$$
$$\alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu = 0$$

und hieraus nach Einl. (16) und (14)

$$d\lambda : d\mu : d\nu = l : m : n,$$

oder, wenn ρ zunächst einen Proportionalitätsfaktor vorstellt

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\rho}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{\rho}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{\rho}. \tag{8}$$

Quadriert und addiert man diese Gleichungen, so zeigt sich, daß ρ dem absoluten Wert nach der in § 4 eingeführte Torsionsradius ist. Es fragt sich nun, ob das in (8) stehende positive Vorzeichen der in § 5 getroffenen Festsetzung über das Vorzeichen der Torsion nicht widerspricht. Um dies zu entscheiden, verfahren wir ähnlich wie in § 4: wir lassen wieder den Koordinatenursprung mit dem Kurvenpunkt P, die positive Richtung der x-, y- und z-Achse bezüglich mit der positiven Richtung der Tangente, Hauptnormale und Binormale zusammenfallen. Es ist dann

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0;\quad l = 0,\ m = 1,\ n = 0;$$
$$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ \nu = 1;\quad dx = ds.$$

Die zweite Gleichung (8) gibt nun

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{\rho}.$$

Da dx positiv ist, hat ρ dasselbe Vorzeichen, wie $d\mu$. Ist nun $d\mu$ positiv, d. h. wächst der Kosinus μ des Neigungswinkels der Binormale gegen die y-Achse mit x, so ist dieser Neigungswinkel in P' kleiner als in P (vergl. Fig. 4). Die Binormale und mit ihr die Schmiegungsebene hat sich also für einen Beobachter, der in der positiven Tangentenrichtung (PT in Fig. 4) blickt, im Sinne des Uhrzeigers um die x-Achse, d. h. die Kurventangente gedreht. In diesem Fall haben wir aber nach der Festsetzung des § 5 positive Torsion, im entgegengesetzten negative Torsion. Das positive Vorzeichen von ρ in (8) entspricht also der in § 5 getroffenen Festsetzung über das Vorzeichen der Torsion. Multipliziert man die Gleichungen (8) der Reihe nach mit l, m, n und addiert, so erhält man mit Benützung der Formeln § 5, (5) und § 4, (4) die Gleichung (7) des § 5 mit dem dort vorläufig gesetzten Minuszeichen.

Um endlich dl, dm, dn zu bilden, differenziere man die Gleichung $l = \mu\gamma - \nu\beta$ [Einl. (14)] und ersetze die Differentiale durch ihre Werte aus (7) und (8); man erhält

$$\frac{dl}{ds} = \frac{1}{r}(n\mu - m\nu) + \frac{1}{\rho}(m\gamma - n\beta),$$

oder nach Einl. (14)

$$(9)\quad \frac{dl}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right),\quad \frac{dm}{ds} = -\left(\frac{\beta}{r} + \frac{\mu}{\rho}\right),\quad \frac{dn}{ds} = -\left(\frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{\rho}\right).$$

Die beiden letzten Gleichungen folgen aus der ersten durch zyklische Vertauschung.

Die Gleichungen (7)—(9) heißen die Frenetschen*) (auch Serretschen) Gleichungen. Als Anwendung derselben behandeln wir die

Aufgabe. Gesucht ist der Mittelpunkt (X', Y', Z') und der Radius R' der Schmiegungskugel oder oskulierenden Kugel, d. h. der Kugel, die durch die vier konsekutiven Punkte P, P', P'', P''' der Raumkurve geht.

Der Mittelpunkt der Schmiegungskugel ist offenbar der Schnittpunkt der drei Mittellotebenen auf PP', $P'P''$, $P''P'''$. Diese fallen aber, wie in § 2 (Schluß) bemerkt, in der Grenze mit den Normalebenen der Punkte P, P', P'' zusammen, und wir bestimmen daher den Mittelpunkt der oskulierenden Kugel als den Schnitt dreier konsekutiven Normalebenen.

Da der Punkt (X', Y', Z') in der Normalebene von P liegt, so ist nach § 2, (9)

$$(10) \qquad (X'-x)\,\alpha + (Y'-y)\,\beta + (Z'-z)\,\gamma = 0.$$

Die Bedingung dafür, daß der Punkt (X', Y' Z') in der Normalebene von P' liegt, erhält man, wenn man in (10) x durch $x+dx$, α durch $\alpha+d\alpha$ u. s. w. ersetzt. Mit Rücksicht auf (10) erhält man unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung

$$(X'-x)\,d\alpha+(Y'-y)\,d\beta+(Z'-z)\,d\gamma-(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)=0,$$

oder nach (2) und (7)

$$(11) \qquad (X'-x)\,l + (Y'-y)\,m + (Z'-z)\,n = r.$$

Ersetzt man in (11) wieder x und l durch $x+dx$, $l+dl$ u. s. w., r durch $r+dr$, so erhält man die Bedingung dafür, daß Punkt (X', Y', Z') in der Normalebene des Punktes P'' liegt, nämlich (unter Berücksichtigung von 11)

$$(X'-x)\,dl + (Y'-y)\,dm + (Z'-z)\,dn \\ -(l\,dx+m\,dy+n\,dz) = dr$$

---

*) Frenet, „Sur les courbes à double courbure“, Thèse, Toulouse 1847. S. auch Journal de Mathém. T. XVII (1852). Serret, „Mémoire sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure“, Journal de Mathém. T. XVI (1851).

und hieraus nach (2), (9), (10) und Einl. (11)

$$(12)\quad (X'-x)\lambda+(Y'-y)\mu+(Z'-z)\nu=-\rho\frac{dr}{ds}.$$

Aus (10)—(12) ergeben sich nun die Koordinaten des Mittelpunkts der Schmiegungskugel, indem man die drei Gleichungen der Reihe nach mit α, l, λ, dann mit β, m, μ und schließlich mit γ, n, ν multipliziert und jedesmal addiert. Man erhält so nach Einl. (12)

$$(13)\quad \begin{aligned} X'-x&=rl-\rho\frac{dr}{ds}\lambda,\\ Y'-y&=rm-\rho\frac{dr}{ds}\mu,\\ Z'-z&=rn-\rho\frac{dr}{ds}\nu. \end{aligned}$$

Dadurch sind die Koordinaten X', Y', Z' des Mittelpunktes der Schmiegungskugel*) im Punkt P bestimmt. Der Radius R' dieser Kugel ergibt sich durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (13)

$$(14)\quad R'^2=(X'-x)^2+(Y'-y)^2+(Z'-z)^2=r^2+\rho^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.$$

§ 7. Anwendung auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders.

Bevor wir weiter gehen, sollen die bisherigen Resultate ausführlich auf ein Beispiel, nämlich auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders angewendet werden. Ihre Gleichungen ergaben sich in § 1, (5) in der Form

$$(1)\quad x=a\cos u,\ y=a\sin u,\ z=au\operatorname{ctg}\delta,$$

wo δ den konstanten Neigungswinkel der Tangenten gegen die Mantellinie des Zylinders bedeutet.

*) Diese einfachen Formeln verdankt man De Saint-Venant; vgl. seine Schrift „Mémoire sur les lignes courbes non planes", présenté à l'Acad. des Sciences en 1844, Journal de l'Ecole Polytechnique, 30. cah., 1845. Die Schmiegungskugel tritt wohl zuerst bei Fuß auf: De sphaeris osculantibus (9. Juli 1806). Mém. de l'Acad. Impér. des Sciences de St. Petersbourg. T. VII. 1820.

Es ist nun

$$(2)\quad \begin{aligned} dx &= -a\sin u\,du, & dy &= a\cos u\,du, & dz &= a\operatorname{ctg}\delta\,du;\\ d^2x &= -a\cos u\,du^2, & d^2y &= -a\sin u\,du^2, & d^2z &= 0;\\ d^3x &= +a\sin u\,du^3, & d^3y &= -a\cos u\,du^3, & d^3z &= 0; \end{aligned}$$

Daraus folgt nach § 2, (3)

$$(3)\quad ds = \frac{a\,du}{\sin\delta},\ s = \frac{au}{\sin\delta}\ \text{(wenn für } u = 0,\ s = 0 \text{ ist)}$$

und aus § 6, (2)

$$(4)\quad \alpha = -\sin u\sin\delta,\quad \beta = \cos u\sin\delta,\quad \gamma = \cos\delta.$$

Hiernach

$$d\alpha = -\cos u\sin\delta\,du,\quad d\beta = -\sin u\sin\delta\,du,\quad d\gamma = 0.$$

Also nach § 6, (5)

$$(5)\quad \frac{1}{r} = \frac{\sin^2\delta}{a},\quad dr = 0;$$

und nach § 6, (3) und (4)

$$(6)\quad l = -\cos u,\quad m = -\sin u,\quad n = 0;$$

$$(7)\quad \lambda = \sin u\cos\delta,\quad \mu = -\cos u\cos\delta,\quad \nu = \sin\delta.$$

Weiter ist nach § 6, (8) $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{l}\frac{d\lambda}{ds}$ und daher

$$(8)\quad \frac{1}{\rho} = -\frac{\sin\delta\cos\delta}{a}.$$

Endlich folgt aus § 6, (14)

$$(9)\quad R' = r = \frac{a}{\sin^2\delta}.$$

Aus den Gleichungen (1)—(9) folgt

Gleichung der Normalebene

$$(10)\quad X\sin u - Y\cos u - \operatorname{ctg}\delta\,(Z - au\operatorname{ctg}\delta) = 0.$$

Gleichung der rektifizierenden Ebene

$$(11)\quad X\cos u + Y\sin u = a \quad \text{oder} \quad Xx + Yy = a^2.$$

Gleichung der Schmiegungsebene

$$X \sin u - Y \cos u + Z \operatorname{tg} \delta - au = 0. \tag{12}$$

Ferner:

Gleichungen der Tangente

$$X = a \cos u - v \sin u \sin \delta, \quad Y = a \sin u + v \cos u \cos \delta, \quad Z = au \operatorname{ctg} \delta + v \cos \delta. \tag{13}$$

Die Gleichungen der Hauptnormale

$$X = (a - v) \cos u, \quad Y = (a - v) \sin u, \quad Z = au \operatorname{ctg} \delta. \tag{14}$$

Die Gleichungen der Binormale

$$X = a \cos u + v \sin u \cos \delta, \quad Y = a \sin u - v \cos u \cos \delta, \quad Z = au \operatorname{ctg} \delta + v \sin \delta. \tag{15}$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$X = -a \cos u \operatorname{ctg}^2 \delta, \quad Y = -a \sin u \operatorname{ctg}^2 \delta, \quad Z = au \operatorname{ctg} \delta.$$

Dies sind zugleich die Koordinaten des Mittelpunktes der Schmiegungskugel.

Konstant sind die Werte: γ, n, ν, r, ρ, R. Es ergeben sich daraus unter Berücksichtigung der berechneten Werte folgende Sätze für die Schraubenlinie:

Satz 1. Die Tangente bildet mit der z-Achse (Zylinderachse) oder die Normalebene mit der xy-Ebene den konstanten Winkel δ.

Satz 2. Die Binormale bildet mit der z-Achse oder die Schmiegungsebene mit der xy-Ebene den konstanten Winkel $90^0 - \delta$.

Satz 3. Die Hauptnormale ist das Lot vom Kurvenpunkt auf die Zylinderachse oder die rektifizierende Ebene ist Tangentialebene an den Zylinder.

Satz 4. Die Krümmung und ebenso die Torsion ist konstant; die Kurve ist in sich verschiebbar; denn ist s der Parameter, so sind alle Vierecke $P P' P'' P'''$ kongruent.

Satz 5. Der Radius der Schmiegungskugel ist gleich dem Krümmungsradius.

Satz 6. Der Krümmungsmittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der Schmiegungskugel zusammen. Der Ort der

Krümmungsmittelpunkte ist eine Schraubenlinie mit derselben Ganghöhe auf einem Kreiszylinder mit derselben Achse und dem Radius $a \operatorname{ctg}^2 \delta = r - a$.

§ 8. Die natürlichen Gleichungen einer Raumkurve.

Auf den Eigenschaften des Dreikants und auf den Frenetschen Gleichungen beruht der folgende wichtige

Satz. Eine Raumkurve ist (abgesehen von ihrer Lage im Raum) eindeutig bestimmt, wenn der Krümmungsradius r und der Torsionsradius ϱ als Funktionen der Bogenlänge s gegeben sind, also durch die Gleichungen

$$(1) \qquad r = \varphi(s), \quad \varrho = \psi(s).$$

Beweis: Die Lage einer Kurve im Raum ist eindeutig bestimmt, wenn wir festsetzen, daß einem bestimmten Wert s_0 des Parameters ein Punkt mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 entspricht, und wenn für diesen Punkt die Lage des die Raumkurve begleitenden Dreikants gegeben ist. Es seien für $s = s_0$ die Werte der neun Kosinus α, β, γ; λ, μ, ν; l, m, n gegeben; dieselben seien $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; λ_0, μ_0, ν_0; l_0, m_0, n_0; sie genügen den Gleichungen (11) und (12) der Einleitung. Unter dieser Voraussetzung ist das simultane System linearer Differentialgleichungen § 6, (7)–(9) zu integrieren. Wir zeigen zunächst, daß ein System von Integralen dieser Gleichungen α, β, γ; λ, μ, ν; l, m, n (kurz α, λ, l), das für $s = s_0$, die Werte $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; λ_0, μ_0, ν_0; l_0, m_0, n_0 annimmt, den Gleichungen Einl. (12) genügt, daß also diese neun Integrale als Richtungskosinus dreier aufeinander senkrechten Richtungen angesehen werden können. Es ergibt sich nämlich aus § 6, (7)–(9)

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \lambda \frac{d\lambda}{ds} + l \frac{dl}{ds} = 0, \quad \beta \frac{d\beta}{ds} + \mu \frac{d\mu}{ds} + m \frac{dm}{ds} = 0,$$

$$\gamma \frac{d\gamma}{ds} + \nu \frac{d\nu}{ds} + n \frac{dn}{ds} = 0,$$

oder integriert mit den Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3,

$$(2) \quad \alpha^2 + \lambda^2 + l^2 = c_1, \; \beta^2 + \mu^2 + m^2 = c_2, \; \gamma^2 + \nu^2 + n^2 = c_3.$$

Weiter folgt aus § 6, (7)—(9)

$$\left(\alpha\frac{d\beta}{ds}+\beta\frac{d\alpha}{ds}\right)+\left(\lambda\frac{d\mu}{ds}+\mu\frac{d\lambda}{ds}\right)+\left(l\frac{dm}{ds}+m\frac{dl}{ds}\right)=0$$

sowie die analogen, durch zyklische Vertauschung aus diesen hervorgehenden Gleichungen. Die Integration ergibt mit den Integrationskonstanten c_4, c_5, c_6

$$\alpha\beta+\lambda\mu+lm=c_4,\quad \beta\gamma+\mu\nu+mn=c_5,\quad \gamma\alpha+\nu\lambda+nl=c_6. \tag{3}$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten geschieht durch die oben angegebene Bedingung, daß für $s=s_0$, die Integrale α, λ, l in α_0, λ_0, l_0 übergehen, und daß diese letzteren den Gleichungen Einl. (12) genügen. Man erhält so

$$c_1=c_2=c_3=1,\quad c_4=c_5=c_6=0.$$

Es genügen also in der Tat die neun Integrale α, λ, l den Bedingungsgleichungen für die Richtungskosinus dreier aufeinander senkrechten Richtungen.

Es ist nun noch zu beweisen, daß die Größen α, λ, l das einzige System von Integralen der Frenetschen Gleichungen mit den obigen Bedingungen bilden. Wir nehmen zu diesem Zwecke an, es gäbe noch ein zweites System von Integralen α_1, λ_1, l_1, und zeigen, daß dies mit dem ersten identisch sein muß. Zieht man nämlich die in α_1, λ_1, l_1 geschriebenen Frenetschen Gleichungen von den entsprechenden, in α, λ, l gebildeten ab, so sieht man, daß auch die neun Größen $\alpha-\alpha_1$, $\lambda-\lambda_1$, $l-l_1$ Integrale der Gleichungen § 6, (7)—(9) sind. Es ist also nach (2) für alle Werte von s

$$\begin{aligned}(\alpha-\alpha_1)^2+(\lambda-\lambda_1)^2+(l-l_1)^2&=C_1,\\ (\beta-\beta_1)^2+(\mu-\mu_1)^2+(m-m_1)^2&=C_2,\\ (\gamma-\gamma_1)^2+(\nu-\nu_1)^2+(n-n_1)^2&=C_3,\end{aligned} \tag{4}$$

wobei C_1, C_2, C_3, Integrationskonstanten sind. Da aber sowohl α, λ, l wie α_1, λ_1, l_1 für $s=s_0$ in α_0, λ_0, l_0 übergehen, so folgt $C_1=C_2=C_3=0$, und darum aus (4) $\alpha=\alpha_1$ $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$, $\lambda=\lambda_1$ usw.

Die beiden Systeme von Integralen α_1, λ_1, l_1 und α, λ, l sind somit identisch, oder die Frenetschen Gleichungen geben nur ein System von Integralen, das für $s=s_0$ in

die gegebenen Werte α_0, λ_0, l_0 übergeht. Sind diese Integrale bestimmt, so erhält man aus § 6, (2) die Gleichungen der Raumkurve in der Form

$$(5) \quad x = \int \alpha\, ds + c_x, \quad y = \int \beta\, ds + c_y, \quad z = \int \gamma\, ds + c_z.$$

Die drei Integrationskonstanten c_x, c_y, c_z bestimmen sich durch die Bedingung, daß für $s = s_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ werden soll. Die Raumkurve ist also in der Tat durch die Gleichungen (1) eindeutig bis auf die Lage im Raum bestimmt. Da diese Gleichungen die Raumkurve unabhängig von jenem Koordinatensystem vollkommen charakterisieren, so heißen sie die natürlichen Gleichungen der Raumkurve.

Bemerkung. Man kann beweisen, daß die Integration der Frenetschen Gleichungen, wenn r und ϱ in Funktion von s gegeben sind, sich auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung von Riccatischem Typus*) zurückführen läßt.

Beweis. Da $\alpha^2 + \lambda^2 + l^2 = 1$ ist, so kann man offenbar

$$(6) \qquad \frac{\alpha + i\lambda}{1 - l} = \frac{1 + l}{\alpha - i\lambda} = u, \qquad \frac{\alpha - i\lambda}{1 - l} = \frac{1 + l}{\alpha + i\lambda} = -\frac{1}{v}$$

setzen. Aus diesen Gleichungen erhält man durch Auflösen die Größen α, λ, l durch die beiden Parameter u und v ausgedrückt, nämlich

$$(7) \qquad \alpha = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad \lambda = i\,\frac{1 + uv}{u - v}, \quad l = \frac{u + v}{u - v}.$$

Die Parameter u und v sind komplexe Größen, und zwar so, daß u und $-\frac{1}{v}$ konjugiert imaginär sind (vergl. (6)). Setzt man aus (7) die Werte für α, λ, l in die Frenetschen Gleichungen ein, so erhält man statt der drei Gleichnngen in α, λ, l folgende zwei in u und v

$$\frac{du}{ds} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right) u^2,$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right) v^2.$$

u und v sind also zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung in σ

$$(8) \qquad \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r} + \frac{i}{\varrho}\right) \sigma^2.$$

---

*) Vergl. hierüber: S. S. Bd. XIII. Schlesinger, Differentialgleichungen, 2. Aufl. p. 58 ff.

Dies ist die Riccatische Differentialgleichung, auf deren Lösung das Problem zurückgeführt ist. Man zeigt leicht, daß, wenn σ eine Lösung von (8), und σ' die zu σ konjugiert imaginäre Größe ist, auch $-\frac{1}{\sigma'}$, eine Lösung von (8) ist. Kennt man also von (8) eine partikuläre Lösung u, so ist der negative reziproke Wert v der konjugiert imaginären Größe von u ebenfalls eine Lösung von (8). Die Werte von α, λ, l ergeben sich dann aus (7). Verfährt man mit β, μ, m und mit γ, ν, n ebenso wie mit α, λ, l, so kommt man offenbar immer auf dieselbe Differentialgleichung (8). Näheres s. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Libre I, Chap. II.

§ 9. Herleitung einer Kurve aus gegebenen Eigenschaften.

Zu den allgemeinen Erklärungen der zwei letzten Paragraphen geben wir einige Beispiele, für die die Integration der Frenetschen Gleichungen gelingt. Als erstes Beispiel diene die

Aufgabe 1. Die Kurven zu bestimmen, für welche die Krümmung $\frac{1}{r}$ konstant Null ist.

Für $r = \infty$ folgt aus § 6, (7) sofort

$$\alpha = c_1, \quad \beta = c_2, \quad \gamma = c_3,$$

und durch Integration von § 6, (2)

$$x = c_1 s + c_1', \quad y = c_2 s + c_2', \quad z = c_3 s + c_3'.$$

Diese Gleichungen stellen eine Gerade dar.

Aufgabe 2. Die Kurven zu bestimmen, für die die Torsion $\frac{1}{\rho}$ konstant Null ist.

Aus § 6, Gl. (8) folgt

$$\lambda = c_1, \quad \mu = c_2, \quad \nu = c_3 .$$

Multipliziert man ferner die Gleichungen § 6, (4) der Reihe nach mit dx, dy, dz und addiert unter Benutzung der für λ, μ, ν soeben gefundenen Werte, so folgt

$$c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz = 0$$

oder integriert

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = c_4 .$$

Diese Gleichung sagt aus, daß alle Punkte der Kurve in einer Ebene liegen; die Kurven mit der Torsion $\frac{1}{\rho} = 0$ sind daher ebene Kurven.

Aufgabe 3. Die Raumkurven zu finden, für welche das Verhältnis der Krümmung zur Torsion, also $r:\rho$ konstant ist.

Zur Lösung ersetzen wir in den Gleichungen (2) und (7)—(9) des § 6 ds durch rdt [s. § 3 (7)] und erhalten so

$$\alpha = \frac{1}{r}\frac{dx}{dt}, \quad \beta = \frac{1}{r}\frac{dy}{dt}, \quad \gamma = \frac{1}{r}\frac{dz}{dt}; \tag{1}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = l, \quad \frac{d\beta}{dt} = m, \quad \frac{d\gamma}{dt} = n; \tag{2}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{lr}{\rho}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{mr}{\rho}, \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{nr}{\rho}; \tag{3}$$

$$\frac{dl}{dt} = -\left(\alpha + \frac{\lambda r}{\rho}\right), \quad \frac{dm}{dt} = -\left(\beta + \frac{\mu r}{\rho}\right), \tag{4}$$

$$\frac{dn}{dt} = -\left(\gamma + \frac{\nu r}{\rho}\right).$$

Wir führen nun die Voraussetzung ein, daß $\frac{r}{\rho} =$ konst. ist und bezeichnen diese Konstante mit $\operatorname{ctg} \delta$. Differenziert man die Gleichungen (4) nach t unter Beachtung von (2) und (3), so folgt

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{l}{\sin^2 \delta}, \quad \frac{d^2 m}{dt^2} = -\frac{m}{\sin^2 \delta}, \quad \frac{d^2 n}{dt^2} = -\frac{n}{\sin^2 \delta},$$

oder, wenn A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3 Integrationskonstanten sind

$$l = A_1 \cos\frac{t}{\sin\delta} + B_1 \sin\frac{t}{\sin\delta}, \quad m = A_2 \cos\frac{t}{\sin\delta} + B_2 \sin\frac{t}{\sin\delta},$$

$$n = A_3 \cos\frac{t}{\sin\delta} + B_3 \sin\frac{t}{\sin\delta}. \tag{5}$$

Da für alle Werte von t $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ist, so müssen die sechs Integrationskonstanten, wie sich leicht ergibt, den Gleichungen genügen:

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1, \quad B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = 1,$$
$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = 0.$$

$A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3$ können also als Richtungskosinus zweier aufeinander senkrechten Geraden angesehen werden. Man kann nun offenbar das Koordinatensystem so wählen, daß die eine dieser Geraden der x-Achse, die andere der y-Achse parallel läuft; es ist dann

$$A_1 = B_2 = 1, \; A_2 = A_3 = B_1 = B_3 = 0,$$

und nach (5)

$$(6) \qquad l = \cos\frac{t}{\sin\delta}, \quad m = \sin\frac{t}{\sin\delta}, \quad n = 0,$$

Die Hauptnormale ist also stets parallel der xy-Ebene, oder steht senkrecht auf der z-Achse. Setzt man die Werte aus (6) in (2) ein und integriert, so folgt

$$(7) \quad \alpha = \sin\delta \sin\frac{t}{\sin\delta} + c_1, \quad \beta = -\sin\delta\cos\frac{t}{\sin\delta} + c_2, \quad \gamma = c_3.$$

Da $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$, erhält man aus (6) und (7) für die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 die Werte:

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = \cos\delta.$$

Es ist also

$$(8) \quad \alpha = \sin\delta\sin\frac{t}{\sin\delta}, \quad \beta = -\sin\delta\cos\frac{t}{\sin\delta}, \quad \gamma = \cos\delta.$$

Aus der letzten Gleichung (8) folgt, daß der Winkel der Tangente gegen die z-Achse konstant ist, und zwar ist nach der Definition von δ die Tangente desselben gleich dem Verhältnis der Krümmung zur Torsion.

Aus (8) und (1) folgt durch abermalige Integration

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= \sin\delta\int r\sin\frac{t}{\sin\delta}\,dt, \quad y = -\sin\delta\int r\cos\frac{t}{\sin\delta}\,dt, \\ z &= \cos\delta\int r\,dt. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Integrationskonstanten $=0$ gesetzt, was eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems bedeutet. Der Krümmungsradius ist eine ganz willkürliche Funktion von s; ist diese gegeben, so bestimme man durch die Gleichung $dt = \frac{ds}{r}$ t als Funktion von s und führe in die Gleichungen (9) s statt t als Variable ein; es ergeben sich dann die Koordinaten x, y, z durch Quadraturen als Funktionen des Parameters s. Um die Natur der durch (9) dargestellten Kurve zu erkennen, konstruieren wir den Zylinder, der sie auf die xy-Ebene projiziert. Da die Tangente der Kurve gegen die z-Achse nach (8) die konstante Neigung δ hat, schneidet die Kurve die Mantellinien des Zylinders unter konstantem Winkel; breitet man also den Zylinder in eine Ebene aus, so geht die Kurve in eine Gerade über; sie ist also die Schraubenlinie des allgemeinen Zylinders (vergl. § 1), was sich auch aus den Gleichungen (9) leicht analytisch ergibt. Wir haben also den

Satz. Die allgemeinste Kurve, für die in allen Punkten $\frac{r}{\rho}$ konstant ist, ist die Schraubenlinie des allgemeinen Zylinders.

Zusatz. Sind insbesondere r und ρ einzeln konstant, so ist die Kurve die Schraubenlinie des Kreiszylinders.

Aufgabe 4. Von einer Raumkurve ist das sphärische Bild der Tangenten (vergl. § 3) gegeben; gesucht sind die Gleichungen der Kurve.

Es seien α, β, γ in Funktion eines Parameters u gegeben; dann ist, wenn V einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, nach § 2, (4) und (5)

$$\frac{dx}{du} = V\alpha, \quad \frac{dy}{du} = V\beta, \quad \frac{dz}{du} = V\gamma;$$

also sind die Gleichungen der Kurve

$$x - x_0 = \int V\alpha\, du, \quad y - y_0 = \int V\beta\, du, \quad z - z_0 = \int V\gamma\, du,$$

wo V eine willkürliche Funktion von u ist, deren Bedeutung sich aus § 2, (4) und (5) leicht ergibt; es ist nämlich $V = \frac{ds}{du}$.

Aufgabe 5. Von einer Kurve ist das sphärische Bild der Binormalen (vgl. § 5, Schluß) gegeben; gesucht sind die Gleichungen der Kurve.

Hier sind λ, μ, ν in Funktion eines beliebigen Parameters u gegeben. Es ist nun nach § 6, (8)

$$l = \rho \frac{d\lambda}{ds}, \quad m = \rho \frac{d\mu}{ds}, \quad n = \rho \frac{d\nu}{ds}.$$

Weiter ist nach Einl. (14) und der letzten Gleichung

$$\alpha = m\nu - n\mu = \frac{\rho\, du}{ds}\left(\nu \frac{d\mu}{du} - \mu \frac{d\nu}{du}\right),$$

also sind nach § 6, (2) die Gleichungen der Kurve

$$x - x_0 = \int \rho \left(\nu \frac{d\mu}{du} - \mu \frac{d\nu}{du}\right) du \text{ usw.,}$$

wo wieder ρ eine willkürliche Funktion von u ist.

Aufgabe 6. Gegeben seien die Richtungskosinus der Hauptnormalen l, m, n (sphärisches Bild der Hauptnormalen); gesucht sind die Kurvengleichungen.

Die Rechnung wird für diesen Fall etwas länger; wir beschränken uns daher auf eine Andeutung der Lösung für den einfachsten Fall, daß l, m, n in Funktion des Bogens s gegeben sind.

Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen § 6, (9) erhält man, wenn $l' = \frac{dl}{ds}$ usw. ist,

$$(10) \qquad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} = l'^2 + m'^2 + n'^2.$$

Differenziert man die erste der genannten Gleichungen, so folgt aus § 6, (7) und (8)

$$\alpha \frac{d\frac{1}{r}}{ds} + \lambda \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} = -l\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) - l''.$$

Bildet man die analogen Gleichungen für β, μ, m und γ, ν, n, quadriert und addiert die drei so erhaltenen Gleichungen, so folgt, da $\Sigma l l' = 0$ und daher $\Sigma l l'' = -\Sigma l'^2$ ist,

$$(11)\quad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds}\right)^2=l''^2+m''^2+n''^2-(l'^2+m'^2+n'^2)^2.$$

Aus dieser Gleichung und aus (10) kann man r und ϱ als Funktionen von s bestimmen; man setzt zu diesem Zweck

$$\frac{1}{r}=\cos u\,\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2};\quad \frac{1}{\varrho}=\sin u\,\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2},$$

geht mit diesem Werte in (11) ein und erhält dann u durch eine Quadratur in Funktion von s und damit r und ϱ. Die Gleichungen § 6, (7) ergeben dann durch Quadraturen α, β, γ und § 6, (2) endlich x, y, z ebenfalls durch Quadraturen in Funktion von s.

§ 10. **Raumkurven und abwickelbare Flächen.**

Zu neuen Betrachtungen werden wir geführt, wenn wir das aus Tangente, Hauptnormale und Binormale bestehende Dreikant längs der Kurve hingleiten lassen und die Gebilde untersuchen, die durch die Ebenen des Dreikants bei seinem Hingleiten an der Kurve, also durch die aufeinander folgenden Schmiegungsebenen, Normalebenen und rektifizierenden Ebenen erzeugt werden. Zu diesem Zweck ist es nützlich, allgemein zu untersuchen, welches geometrische Gebilde durch eine einfache, stetige Folge von Ebenen erzeugt wird. Wir müssen hierbei allerdings einige Begriffe, die erst im II. Abschnitt (§ 15) eingehend behandelt werden, hier als bekannt voraussetzen (namentlich Tangente und Tangentialebene einer Fläche) bezw. auf Abschnitt II verweisen. — Zunächst beweisen wir den

Satz 1. Eine einfache, stetige Folge von Ebenen erzeugt eine Fläche, die von allen Ebenen der Folge berührt wird: diese Fläche ist ohne Dehnung und Faltung in eine Ebene abwickelbar und heißt daher eine abwickelbare Fläche.

Beweis. Die Ebenen der Folge seien $E_1, E_2, E_3 \ldots$, (vgl. Fig. 5). Je zwei aufeinanderfolgende Ebenen schneiden sich in einer Geraden, z. B. E_1 und E_2 in der Geraden g_1, E_2 und E_3 in g_2 u. s. w. Die Fläche kann also auch erzeugt gedacht werden durch eine einfache stetige Folge von

Geraden: $g_1, g_2, g_3 \ldots$, und zwar mit der besonderen Eigenschaft, daß je zwei konsekutive Geraden, z. B. g_2 und g_3 sich schneiden; denn g_2 ist der Schnitt von E_2 und E_3; g_3 der Schnitt von E_3 und E_4; g_2 und g_3 liegen also beide in E_3 und schneiden sich somit in einem Punkte P_2 dieser Ebene.

Da ferner alle Linienelemente der Fläche, welche einen Punkt auf g_2 mit einem unendlich benachbarten Punkt auf g_3 verbinden, in E_3 liegen, so ist E_3 eine Tangentialebene an die Fläche; dasselbe läßt sich ebenso von jeder anderen Ebene der Folge zeigen. Alle diese Ebenen berühren daher die Fläche, und zwar jede längs einer Geraden der Fläche. Dreht man nun die Ebene E_2 um g_1, bis g_2 in die Ebene E_1 fällt, dann E_3 um die neue Lage von g_2, bis auch g_3 in die Ebene E_1 fällt u. s. w., so sieht man, daß die ganze Fläche ohne Dehnung und Faltung der einzelnen Flächenteile in eine Ebene abgewickelt werden kann. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.*)

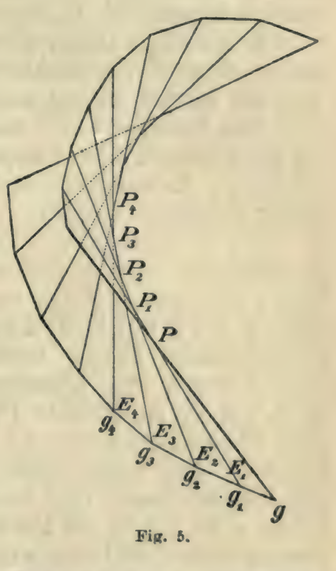


Fig. 5.

Die hier betrachteten Flächen sind ein spezieller Fall einer allgemeineren Gattung von Flächen, den sogenannten Regelflächen. Jede Fläche nämlich, die durch eine ein-

*) Daß es außer den Kegeln und Zylindern noch andere Flächen gibt, die ohne Dehnung und Faltung in eine Ebene ausgebreitet werden können, haben Euler und Monge erkannt. Vgl. für das Folgende:

Euler, „De solidis quorum superficiem in planum explicare licet“, Novi comentarii Acad. Petropolitanae, a. 1771, T. XVI, Petersburg 1772.

Monge, „Mémoire sur les Développées, les Rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure“ présenté en 1771, Mémoires des Savants étrangers de l'Inst., T. X, p. 511—550, Paris 1785.

fache, stetige Folge von Geraden gebildet wird, oder, kinematisch ausgedrückt, die durch stetige Bewegung einer Geraden erzeugt wird, heißt eine Regelfläche, die einzelnen Geraden derselben ihre Erzeugenden. (Näheres s. II. Bd., § 31 f.). Diese Regelflächen zerfallen in zwei Klassen:

1. nicht abwickelbare Regelflächen, auch windschiefe Flächen genannt, sind solche Regelflächen, bei denen sich je zwei konsekutive Erzeugende nicht schneiden, und die nicht in eine Ebene abgewickelt werden können (z. B. hyperbolisches Paraboloid).

2. abwickelbare Flächen sind solche Regelflächen, bei denen je zwei konsekutive Erzeugende sich schneiden, und die in eine Ebene abgewickelt werden können.

Wir haben uns hier nur mit den abwickelbaren Flächen zu beschäftigen, die in engster Beziehung zu den bisher betrachteten Raumkurven stehen. Diese Beziehung soll nun weiter dargelegt werden.

Die Schnittpunkte P, P_1, P_2 von je zwei konsekutiven Erzeugenden, oder je drei konsekutiven Ebenen des Systems bilden eine stetige Folge von Punkten, also eine Raumkurve, welche die Rückkehrkante oder Kuspidalkante der abwickelbaren Fläche heißt. Auf jeder Erzeugenden der Fläche liegen zwei konsekutive Punkte der Rückkehrkante; z. B. auf g_3 die Punkte P_2 und P_3. Die Erzeugenden der Fläche sind daher Tangenten der Rückkehrkante. Auf jeder Ebene des Systems (Tangentialebene der Fläche) liegen drei konsekutive Punkte der Rückkehrkante, z. B. auf E_2 die Punkte P, P_1, P_2; die Tangentialebenen der Fläche sind daher die Schmiegungsebenen der Rückkehrkante. Umgekehrt sieht man, daß die Tangenten einer beliebigen Raumkurve die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche bilden, und daß die Schmiegungsebenen der Kurve diese Fläche berühren oder, wie man sagt, einhüllen. Die Fläche ist also die Eingehüllte oder Enveloppe jener Schmiegungsebenen. Jede Erzeugende wird durch den Berührungspunkt mit der Rückkehrkante in zwei Teile geteilt. Jeder Teil erzeugt einen Mantel der abwickelbaren Fläche; die beiden Mäntel hängen längs der Rückkehrkante zusammen und berühren sich dort; die Rückkehrkante bildet eine Art Schneide oder Grat der Fläche. Man beweist ohne Schwierigkeit, daß jede Ebene, sofern sie

nicht durch eine Erzeugende geht, die Fläche nach einer Kurve schneidet, die im Schnittpunkt mit der Rückkehrkante einen *Rückkehrpunkt* hat; daher der Name *Rückkehrkante*.

Rollt man eine abwickelbare Fläche in die Ebene ab, so geht natürlich jede Kurve auf der abwickelbaren Fläche in eine ebene Kurve über. Es ist klar, daß die Bogenlänge der ursprünglichen Kurve und der ebenen Kurve zwischen entsprechenden Punkten dieselbe ist. Von besonderem Interesse sind hierbei diejenigen Kurven, welche bei der Abwicklung in *Geraden* übergehen. Da die Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene darstellt, so ist auch die ihr entsprechende Kurve *die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Fläche*. Solche Kurven, welche zwei Punkte auf der

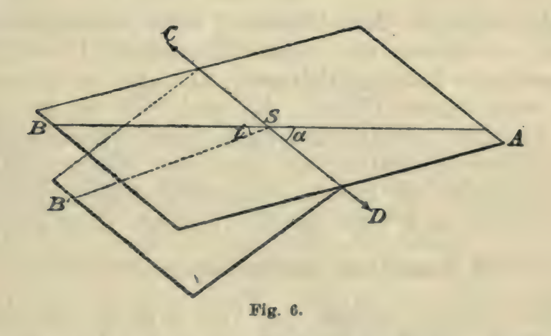


Fig. 6.

Fläche auf dem kürzesten Wege verbinden, heißen *geodätische Linien*. Von diesen geodätischen Linien gilt folgender Satz, den wir hier nur für abwickelbare Flächen aufstellen und beweisen, der jedoch, wie sich später zeigen wird, für alle Flächen besteht, nämlich:

Satz 2. Die Schmiegungsebene einer geodätischen Linie einer abwickelbaren Fläche steht in jedem Punkt auf der Tangentialebene der Fläche senkrecht.

Zum Beweis denken wir uns (s. Fig. 6) in einer Ebene eine beliebige Gerade AB gezogen und dann die Ebene um eine zweite Gerade CD, die die erste in S schneide, umgebrochen, so daß der Punkt B in die neue Lage B' kommt.

Der Winkel BSB' sei mit t, der Winkel ASD mit α bezeichnet. Dann ist $CSB = CSB' = \alpha$, da ja die Winkel zweier Geraden in der Ebene vor und nach der Drehung natürlich dieselben sind. Wir berechnen nun den Winkel, den die Ebene ASB' mit der Ebene ASD einschließt, indem wir auf das Dreikant $S(ADB')$ den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie anwenden. In diesem Dreikant sind drei Seiten bekannt, nämlich $ASD = \alpha$; $ASB' = 180^0 - t$; $B'SD = 180^0 - \alpha$; der letzteren Seite liegt der gesuchte Winkel gegenüber, der mit x bezeichnet sei; es ist also

$$-\cos\alpha = -\cos\alpha\cos t + \sin\alpha\sin t\cos x,$$

oder, wie man leicht nachrechnet

$$\cos x = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Gibt man nun dem Winkel t einen unendlich kleinen Wert dt, so können die beiden Ebenen ASD und SDB' als konsekutive Tangentialebenen, SD also als Erzeugende einer abwickelbaren Fläche, AS und SB' als konsekutive Tangenten einer geodätischen Linie dieser Fläche angesehen werden. Der Winkel dt ist dann der Kontingenzwinkel, die Ebene ASB' die Schmiegungsebene dieser geodätischen Linie. Dann wird aber in der Grenze, d. h. für $t = 0$, $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 0$, und damit, wie aus der letzten Gleichung hervorgeht, auch $\cos x = 0$, also $x = 90^0$, d. h. die Schmiegungsebene der geodätischen Linie steht auf der Tangentialebene der abwickelbaren Fläche senkrecht.

Übrigens sieht man dies auch sehr leicht geometrisch ein: Bei der Drehung der Ebene $ABCD$ um die Gerade CD beschreibt AB einen Rotationskegel, dessen Achse CD ist. Die Tangentialebene dieses Kegels längs AB steht auf der Ebene $ABCD$ senkrecht. Diese Tangentialebene ist die Ebene BSB', da SB' die der Mantellinie SB benachbarte ist. Da aber diese Ebene zugleich die Schmiegungsebene der geodätischen Linie ASB' in S ist, so sieht man, daß diese Ebene auf der Tangentialebene $ABCD$ des Flächenpunkts S senkrecht steht.

Analytisch wird eine einfache, stetige Folge von Ebenen dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0 .$$

wo A, B, C, D Funktionen eines veränderlichen Parameters u sind. Den verschiedenen Werten von u in (1) entsprechen die verschiedenen Ebenen der Folge. Wir bezeichnen Gleichung (1) zur Abkürzung mit

$$(2) \qquad f(u) = 0.$$

Wie dem Parameterwerte u die Ebene $f(u) = 0$ entspricht, so entspricht dem Parameterwerte $u + du$ die nächstfolgende Ebene $f(u + du) = 0$, oder entwickelt

$$f(u) + \frac{f'(u)\,du}{1} + \frac{f''(u)\,du^2}{1 \cdot 2} + \cdots\cdot = 0.$$

Die Gleichungen der Schnittgeraden der beiden konsekutiven Ebenen erhält man durch Kombination der letzten Gleichung mit (2), also, unter Beschränkung auf die Glieder niederster Ordnung in der Form

$$(3) \qquad f(u) = 0 , \quad f'(u) = 0 .$$

Dies sind also die Gleichungen der Erzeugenden der Fläche. Jedem Parameterwerte u entspricht eine solche Erzeugende; variiert man u, so stellen die Gleichungen (3) die Gesamtheit der Flächenerzeugenden dar; eliminiert man also u aus (3), so erhält man eine Gleichung in x, y, z, welche die Gleichung der abwickelbaren Fläche ist.

Setzt man in (3) $u + du$ statt u, so erhält man die nächstfolgende Erzeugende; der Schnittpunkt der beiden konsekutiven Erzeugenden ergibt sich daher ähnlich wie oben aus

$$(4) \qquad f(u) = 0 , \quad f'(u) = 0 , \quad f''(u) = 0.$$

Variiert man u in (4), so stellen die Gleichungen die Rückkehrkante dar; durch Auflösung von (4) nach x, y, z erhält man die Koordinaten eines Punktes derselben in Funktion des Parameters u.

Die Beziehung zwischen Raumkurven und abwickelbaren Flächen lassen sich noch übersichtlicher darstellen mit Benutzung des sogenannten Dualitätsprinzips*) nach welchem Punkt und

---

*) Vgl. hierüber S. S. Bd. IX. Simon, analytische Geometrie des Raumes I.; Abschnitt IV.

Ebene als entsprechende Gebilde im Raum anzusehen sind. Ohne auf die Begründung näher einzugehen, stellen wir die dualistisch sich entsprechenden Gebilde einander gegenüber:

Einfach stetige Folge von Punkten — Raumkurve.	Einfach stetige Folge von Ebenen — abwickelbare Fläche.
Verbindungslinie zweier konsekutiven Punkte — Tangente der Raumkurve.	Schnittgerade zweier konsekutiven Ebenen — Erzeugende der abwickelbaren Fläche.
Ebene durch drei konsekutive Punkte — Schmiegungsebene der Raumkurve.	Schnittpunkt dreier konsekutiven Ebenen — Punkt der Rückkehrkante.
Geometrischer Ort dieser Ebenen — abwickelbare Fläche der Raumkurve.	Geometrischer Ort dieser Punkte — Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche.

§ 11. Abwickelbare Flächen, erzeugt durch die Ebenen des begleitenden Dreikants.

Die allgemeinen Betrachtungen des § 10 sollen nun angewendet werden auf die abwickelbaren Flächen, welche entstehen, wenn das begleitende Dreikant längs der Kurve hingleitet. Die Schmiegungsebene, die Normalebene und die rektifizierende Ebene erzeugen dann je eine abwickelbare Fläche und es sollen nun die Gleichungen dieser Flächen und ihrer Rückkehrkanten bestimmt werden. Wir setzen dabei wieder voraus, daß die Koordinaten eines Punktes (x, y, z) der Raumkurve in Funktion eines variabeln Parameters u gegeben sind.

1. Enveloppe der Schmiegungsebenen (abwickelbare Tangentenfläche).

Zwei konsekutive Schmiegungsebenen schneiden sich in einer Tangente der Kurve; die gesuchte Fläche wird daher erzeugt durch die Kurventangenten. Ist v der Abstand des variabeln Punkts (X, Y, Z) der Tangente vom Berührungspunkt, so sind nach § 2, (7) die Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z)

$$(1) \qquad X = x + v\alpha, \quad Y = y + v\beta, \quad Z = z + v\gamma.$$

Ist u konstant, v dagegen variabel, so durchläuft der Punkt (X, Y, Z) die Tangente im Punkt (x, y, z); ändern sich u und v gleichzeitig, so wandert der Punkt (X, Y, Z) auf allen Tangenten der Kurve, d. h. die Gleichungen (1), die X, Y, Z als Funktionen der beiden variabeln Parameter

darstellen, ergeben den geometrischen Ort aller Tangenten, oder sie sind die Gleichungen der abwickelbaren Tangentenfläche. Die Elimination der Parameter u und v aus (1) würde die Flächengleichung in der gewöhnlichen Form $F(X, Y, Z) = 0$ geben. Für viele Untersuchungen ist es aber zweckmäßiger, die Form (1) beizubehalten (vergl. II. Bd., Abschn. I). Die Rückkehrkante der abwickelbaren Tangentenfläche ist natürlich die Raumkurve selbst.

2. Enveloppe der Normalebenen (abwickelbare Polarfläche).

Da die Normalebene in einem Punkt P und die Normalebene in einem benachbarten Punkt beide auf der Schmiegungsebene in P senkrecht stehen, und beide (als Grenzgebilde von zwei konsekutiven Mittellotebenen) durch den Krümmungsmittelpunkt hindurchgehen (vergl. § 2, Schluß), so geht die Schnittgerade der beiden konsekutiven Normalebenen durch den Krümmungsmittelpunkt und steht in ihm senkrecht auf der Schmiegungsebene, ist also parallel der Binormalen; sie heißt auch wohl die Krümmungsachse des Punktes P. Die abwickelbare Polarfläche ist daher der Ort der Krümmungsachsen. Da $x + rl$, $y + rm$, $z + rn$ nach § 4, (7) die Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts sind, so ist nach obigen Bemerkungen die Gleichung der Krümmungsachse im Punkte P

$$(2) \quad X = x + rl + v\lambda, \quad Y = y + rm + v\mu, \quad Z = z + rn + v\nu.$$

Ist hier u konstant, v veränderlich, so durchläuft der Punkt (X, Y, Z) die Krümmungsachse des Punktes (x, y, z). Sind u und v beide veränderlich, so stellen die Gleichungen (2) den Ort aller Krümmungsachsen, d. h. die abwickelbare Polarfläche dar.

Um die Gleichung ihrer Rückkehrkante zu finden, hätten wir den Schnittpunkt dreier konsekutiven Normalebenen zu bestimmen. Wir wissen aber schon aus § 6, daß dies der Mittelpunkt der Schmiegungskugel ist; dort ist auch die Rechnung durchgeführt. Wir entnehmen also aus dem dort gefundenen Resultat § 6, (13) die Gleichungen der Rückkehrkante der abwickelbaren Polarfläche in der Form

$$(3)\qquad \begin{gathered} X = x + rl - \rho\frac{dr}{ds}\lambda,\quad Y = y + rm - \rho\frac{dr}{ds}\mu, \\ Z = z + rn - \rho\frac{dr}{ds}\nu. \end{gathered}$$

Zusatz. Da die Normalebene eines Punktes P der Raumkurve die abwickelbare Polarfläche längs einer Erzeugenden (Krümmungsachse) berührt, so berühren auch alle Normalen in P die abwickelbare Polarfläche, und zwar ist für die Hauptnormale der Berührpunkt der Krümmungsmittelpunkt.

3. Enveloppe der rektifizierenden Ebene (rektifizierende Abwicklungsfläche).

Die Gleichung der rektifizierenden Ebene war [§ 4, (13)]

$$(4)\qquad (X-x)l + (Y-y)m + (Z-z)n = 0.$$

Hierbei sind $x, y, z; l, m, n$ Funktionen von u. Man kann also im Anschluß an § 10 die linke Seite dieser Gleichung mit $f(u)$ bezeichnen. Wir haben nun, um die Enveloppe der rektifizierenden Ebenen zu finden, $f'(u) = 0$ zu bilden, wobei zu beachten ist, daß $\frac{df}{du} = \frac{df}{ds}\frac{ds}{du}$ ist. Wir erhalten so unter Berücksichtigung von Einl. (11), § 6, (2) und (9)

$$(5)\qquad (X-x)\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right) + (Y-y)\left(\frac{\beta}{r} + \frac{\mu}{\rho}\right) + (Z-z)\left(\frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{\rho}\right) = 0.$$

Aus (4) und (5) folgt nach Einl. (16) und (14), wenn v einen Proportionalitätsfaktor bedeutet

$$(6)\qquad \begin{gathered} X = x + v\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{r}\right),\quad Y = y + v\left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{r}\right), \\ Z = z + v\left(\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{r}\right). \end{gathered}$$

Diese Gleichungen drücken die Koordinaten eines Punktes der rektifizierenden Abwickelungsfläche in Funktion der beiden variabeln Parameter u und v aus; es sind also die Gleichungen der rektifizierenden Abwickelungsfläche.

Um schließlich noch die Rückkehrkante derselben zu bestimmen, haben wir noch $f''(u)$ zu bilden, d. h. (5) noch einmal nach u zu differenzieren. Wir finden ähnlich wie oben unter Berücksichtigung von (4), wenn wir die Ableitungen von r und ρ nach s mit r' und ρ' bezeichnen

$$(7)\qquad \begin{aligned}(X-x)\left(\frac{\alpha r'}{r^2}+\frac{\lambda\rho'}{\rho^2}\right)+(Y-y)\left(\frac{\beta r'}{r^2}+\frac{\mu\rho'}{\rho^2}\right)\\ +(Z-z)\left(\frac{\gamma r'}{r^2}+\frac{\nu\rho'}{\rho^2}\right)+\frac{1}{r}=0.\end{aligned}$$

Aus (4), (5) und (7) sind nun X, Y, Z in Funktion von u zu berechnen. Es geschieht dies am einfachsten, wenn man die Werte von X, Y, Z aus (6) entnimmt und in (7) einsetzt. Man erhält so folgende Bestimmungsgleichung für v

$$v\left(\frac{r'}{\rho r^2}-\frac{\rho'}{r\rho^2}\right)+\frac{1}{r}=0.$$

Setzt man den hieraus gefundenen Wert von v in (6) ein, so erhält man die Gleichungen der Rückkehrkante der rektifizierenden Abwicklungsfläche in der Form

$$(8)\qquad \begin{aligned}X=x+\rho\frac{\alpha r-\lambda\rho}{\rho' r-r'\rho},\quad Y=y+\rho\frac{\beta r-\mu\rho}{\rho' r-r'\rho},\\ Z=z+\rho\frac{\gamma r-\nu\rho}{\rho' r-r'\rho}.\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Enveloppe der rektifizierenden Ebenen, oder die rektifizierende Abwicklungsfläche verdankt ihren Namen dem Umstand, daß die Raumkurve bei der Abwicklung dieser Fläche in eine Ebene sich in eine Gerade verwandelt; denn die Schmiegungsebene der Kurve steht ja auf der rektifizierenden Ebene überall senkrecht; die Kurve ist also nach § 10 eine geodätische Linie der rektifizierenden Abwicklungsfläche, geht mithin bei der Abwicklung in eine Gerade über.

§ 12. **Evoluten und Evolventen.**

Wie von einer ebenen Kurve kann man auch von einer Raumkurve eine andere dadurch ableiten, daß man sich auf die Raumkurve einen Faden aufgespannt denkt

und denselben so abwickelt, daß das freie Ende stets in der Tangentenrichtung gespannt bleibt, der Rest aber auf der Kurve aufliegt. Ein Punkt des Fadens wird dabei eine Kurve beschreiben, die man eine Evolvente der ursprünglichen Kurve nennt (genauer Filarevolvente im Gegensatz zu den weiter unten zu besprechenden Planevolventen);

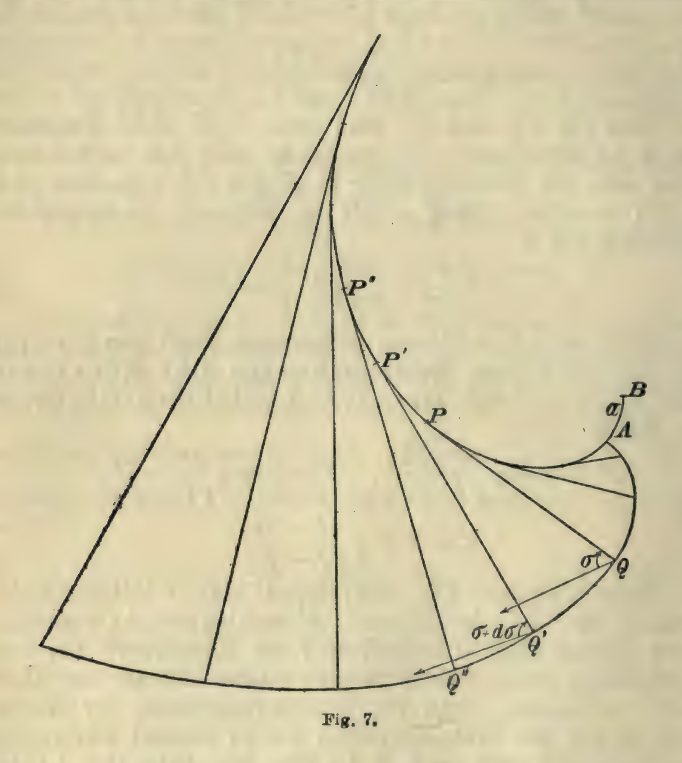


Fig. 7.

die ursprüngliche Kurve heißt die Evolute der neuen; hieraus ergeben sich zwei Aufgaben:

1. Gegeben die Evolute, gesucht die Evolvente.

Von der Evolute P, P', P'' seien die Koordinaten x, y, z eines Punktes P als Funktionen eines Parameters u gegeben. Der Bogen s der Kurve möge von dem festen Punkte B (s. Fig. 7) im Sinne BP gerechnet werden. Auf der Tangente in P sei ein Punkt Q mit den Koordinaten

X, Y, Z, der bei Abwicklung des oben erwähnten Fadens die Evolvente Q, Q', Q'' beschreibt; A sei der Punkt, in welchen Q bei Aufwicklung des Fadens auf die Kurve P, P', P'' zu liegen kommt, oder, was dasselbe ist, der Punkt, von dem aus die Abwicklung des Fadens begonnen wurde, und es sei das Kurvenstück $BA = a$; dann ist $PQ = s - a$. Nach Einl. (4) ist dann, da Q auf der negativen Richtung der Tangente liegt,

$$(1)\quad X = x - (s - a)\alpha, \quad Y = y - (s - a)\beta, \quad Z = z - (s - a)\gamma.$$

Damit sind X, Y, Z als Funktionen des Parameters u dargestellt, und die Gleichungen (1) sind daher die gesuchten Gleichungen der Evolvente. Da in (1) die Konstante a willkürlich ist, oder, anders ausgedrückt, da mit der Abwicklung in einem beliebigen Punkt der Kurve begonnen werden kann, so sieht man, daß es zu einer Kurve als Evolute unendlich viele Evolventen gibt; dieselben liegen alle auf der abwickelbaren Tangentenfläche der Evolute. — Bei der Abwicklung beschreibt Q in der Schmiegungsebene $P\,P'\,P''$ einen unendlich kleinen Kreisbogen um P als Mittelpunkt. Das Bogenelement $Q\,Q'$, oder die Tangente der Evolvente steht daher senkrecht auf PQ, d. h. auf der entsprechenden Tangente der Evolute. Es folgt also der

Satz 1. Die Evolventen einer Raumkurve sind die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden der abwickelbaren Tangentenfläche dieser Kurve*), oder die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind die Evolventen der Rückkehrkante.

2. Gegeben die Evolvente, gesucht die Evolute.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß man zu einer gegebenen Kurve als Evolvente eine Evolute erhält, indem man durch die Punkte der Evolvente Normalen so zieht, daß sie eine abwickelbare Fläche bilden. Zur Konstruktion der Evolute ziehe man daher in einem Punkt Q der Evolvente eine beliebige Normale, bringe sie zum Schnitt mit der Normalebene des konsekutiven Punktes Q' in P'

*) d. h. sie schneiden diese Erzeugenden überall senkrecht.

und verfahre ebenso mit Q', Q'' u. s. f. Die Rückkehrkante der so entstandenen abwickelbaren Fläche ist alsdann e i n e Evolute. Da in Q unendlich viele Normalen möglich sind, g i b t e s z u j e d e r E v o l v e n t e a u c h u n e n d l i c h v i e l e E v o l u t e n.

Es seien wieder die Koordinaten x, y, z eines Punktes Q der Evolvente als Funktionen des Parameters u gegeben. Wir ziehen nun in der Normalebene des Punktes Q einen beliebigen Strahl QP, mit den Richtungskosinus a, b, c der mit der Hauptnormalen (l, m, n) in Q den Winkel σ bilde, und ebenso in dem konsekutiven Punkt Q' einen Strahl, der mit der Hauptnormalen dieses Punktes den Winkes $\sigma + d\sigma$ bildet. Stellt man dann die Bedingung auf, daß diese zwei Strahlen sich schneiden, so ergibt sich σ in Funktion von u, und damit die gesuchte abwickelbare Fläche mit ihrer Rückkehrkante. Da

$$al + bm + cn = \cos\sigma\,, \quad a\lambda + b\mu + c\nu = \sin\sigma\,,$$

so erhält man für a, b, c

$$a = l\cos\sigma + \lambda\sin\sigma,\ b = m\cos\sigma + \mu\sin\sigma,\ c = n\cos\sigma + \nu\sin\sigma.$$

Sind X, Y, Z die Koordinaten von P, so hat man, wenn v einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,

$$(2)\qquad \begin{gathered} X = x + v(l + \lambda\,\mathrm{tg}\,\sigma)\,, \quad Y = y + v(m + \mu\,\mathrm{tg}\,\sigma)\,, \\ Z = z + v(n + \nu\,\mathrm{tg}\,\sigma)\,. \end{gathered}$$

Der Punkt P (X, Y, Z) ist nun dann ein Punkt der Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche, d. h. der gesuchten Evolute, wenn auch die Normale des Punktes Q', die mit dessen Hauptnormale den Winkel $\sigma + d\sigma$ bildet, durch P hindurchgeht. Die Gleichungen (2) müssen also auch noch gelten, wenn man $x + dx$, $l + dl$ u. s. w. statt x, l u. s. w. setzt, d. h., wenn man in (2) alle Größen außer X, Y, Z differenziert.

Aus (2) folgt so nach § 6, (2), (8), (9)

$$0 = \alpha + \frac{dv}{ds}(l + \lambda\,\mathrm{tg}\,\sigma) + v\left[-\left(\frac{a}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right) + \frac{l}{\rho}\mathrm{tg}\,\sigma + \frac{\lambda}{\cos^2\sigma}\frac{d\sigma}{ds}\right].$$

Bildet man durch zyklische Vertauschung die analogen Gleichungen, multipliziert sie der Reihe nach mit α, β, γ, dann mit l, m, n und endlich mit λ, μ, ν und addiert jedesmal, so folgt nach Einl. (11)

$$1-\frac{v}{r}=0, \frac{dv}{ds}+\frac{v}{\rho}\operatorname{tg}\sigma=0, \frac{dv}{ds}\operatorname{tg}\sigma-\frac{v}{\rho}+\frac{v}{\cos^2\sigma}\frac{d\sigma}{ds}=0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$v=r, \tag{3}$$

die beiden anderen nach Elimination von $\frac{dv}{ds}$

$$d\sigma=\frac{ds}{\rho}=d\tau; \quad \text{also}$$

$$\sigma=\tau+C. \tag{4}$$

Dabei ist $d\tau$ der Torsionswinkel der Evolvente, C eine willkürliche Konstante. Die Größe τ ist die Summe aller Torsionswinkel $d\tau$ der Evolvente gemessen von einem bestimmten Punkt an oder die Bogenlänge des sphärischen Bildes der Binormalen.

Man erhält also schließlich aus (2), (3), (4) für die Koordinaten eines Punktes der gesuchten Evolute

$$X=x+r[l+\lambda\operatorname{tg}(\tau+C)], Y=y+r[m+\mu\operatorname{tg}(\tau+C)], \tag{5}$$
$$Z=z+r[n+\nu\operatorname{tg}(\tau+C)].$$

Jedem Wert der Konstanten C entspricht eine Evolute der gegebenen Kurve; eine Kurve besitzt somit in der Tat unendlich viele Evoluten; aus einer derselben erhält man die übrigen dadurch, daß man die Normalen QP, $Q'P'$ der Evolute in den bezüglichen Normalebenen um einen konstanten Winkel gegen ihre ursprüngliche Lage dreht und die Enveloppe der gedrehten Normalen konstruiert. Wir haben also

Satz 2. Die Evoluten einer Raumkurve sind die Rückkehrkanten der abwickelbaren Flächen, deren Erzeugende Normalen der Raumkurve sind.

Zusatz. Dreht man die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche um ihre Schnittpunkte mit einer Orthogonaltrajektorie um einen konstanten Winkel so, daß die Erzeugenden sich in der Normalebene der Trajektorie bewegen, so bilden die Erzeugenden auch in der neuen Lage eine abwickelbare Fläche.

Bemerkung. Die Normalebenen in den Punkten Q und Q' der Evolvente schneiden sich nach § 11 in der Krümmungsachse des Punktes Q; diese geht, wie man sieht, durch P'. Die Evolute liegt daher auf dem Ort der Krümmungsachsen der Evolvente, d. h. auf der abwickelbaren Polarfläche, oder umgekehrt: die abwickelbare Polarfläche ist der geometrische Ort aller Evoluten einer Raumkurve. Da die Krümmungsachse des Punktes Q nach § 11 auch durch seinen Krümmungsmittelpunkt geht, so liegt der Ort der Krümmungsmittelpunkte auch auf der abwickelbaren Polarfläche, ist aber, wie zum Unterschied von den ebenen Kurven bemerkt sei, keine Evolute, da zwei konsekutive Hauptnormalen windschief sind (vgl. die Bemerkung S. 19).

Man überzeugt sich auch leicht, daß, wenn die Normalebene in Q, welche ja die abwickelbare Polarfläche berührt, auf dieser abrollt, d. h. der Reihe nach um die Erzeugenden sich dreht, der in der Normalebene fest gedachte Punkt Q gerade die Evolvente beschreibt.

Da ferner die Schmiegungsebene jeder Evolute die Tangente der Evolvente enthält, steht sie auf der Normalebene der Evolvente, d. h. auf der Tangentialebene der abwickelbaren Polarfläche der Evolvente senkrecht. Nach § 10, Satz 2 ist also jede Evolute eine geodätische Linie der abwickelbaren Polarfläche und geht somit bei Abwicklung derselben in eine Gerade über.

Als Beispiel zu den Entwicklungen dieses Paragraphen behandeln wir die

Aufgabe. Die Evoluten einer ebenen Kurve zu finden (vgl. Fig. 7a).

Die Kurve liege in der xy-Ebene. Es ist dann

$$z = 0, \quad \frac{1}{\rho} = 0, \quad \tau = C, \quad n = 0, \quad \lambda = \mu = 0, \quad \nu = 1.$$

Die Evoluten haben also die Gleichungen

$$X = x + lr, \quad Y = y + mr, \quad Z = r \operatorname{tg} C.$$

Die zwei ersten Gleichungen stellen einen Zylinder dar, der auf der xy-Ebene senkrecht steht und dieselbe nach der ebenen Evolute P_1, P_1', P_1'' (hier = Ort der Krümmungsmittelpunkte) der gegebenen Evolvente schneidet. Dieser

Zylinder ist also der Ort der Schnittgeraden konsekutiver Normalebenen der Evolvente, die alle auf der xy-Ebene (Schmiegungsebene) senkrecht stehen, d. h. die abwickelbare Polarfläche oder der Ort der Evoluten. Da diese auf der Polarfläche geodätische Linien sind, so kann man hieraus

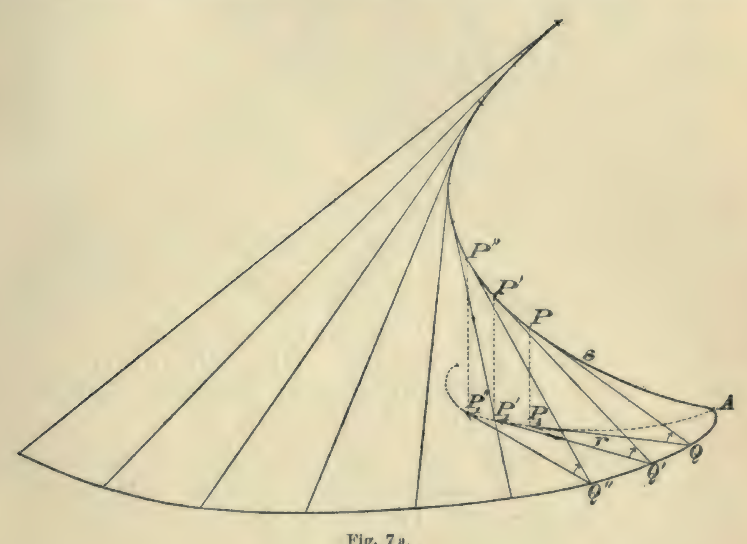


Fig. 7a.

schon schließen, daß die Evoluten Schraubenlinien auf dem Evolutenzylinder sind. Dies folgt aber ebenso einfach aus der dritten der obigen Gleichungen; denn $\frac{Z}{r}$ ist, wie sich aus der Figur ergibt, die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Kurventangente gegen die xy-Ebene; dieser Winkel ist also konstant $= C$. Jede Evolute schneidet demnach die Erzeugenden des Zylinders unter konstantem Winkel und ist daher eine Schraubenlinie desselben.

3. Planevolventen und Planevoluten.*) Man kann zu einer gegebenen Kurve noch auf eine zweite Art

*) Die Planevolventen hat zuerst Lancret behandelt, vgl. sein Werk „Mémoire sur les courbes à double courbure“, présenté en 1802. Mémoires des Savants étrangers de l'Institut, T. I, 1805.

Evolventen konstruieren. In § 10 p. 38 f. haben wir gesehen, daß die Schmiegungsebene eines Punktes der Raumkurve durch Drehung um die Tangente mit der nächstfolgenden Schmiegungsebene zur Deckung gebracht werden kann. So geht z. B. in Fig. 5 die Ebene E_1 nach einer infinitesimalen Drehung um die Gerade g_1 in die Ebene E_2, diese um g_2 gedreht in E_3 über u. s. w. Denkt man sich nun in der Ebene E_1 einen festen Punkt P, so wird dieser Punkt, wenn E_1 auf der abwickelbaren Fläche abrollt (also zuerst um g_1 gedreht wird, bis E_1 mit E_2 zusammenfällt, dann um g_2 u. s. w.), eine Kurve beschreiben; diese Kurve heißt eine Planevolvente der gegebenen, während die ursprüngliche Kurve die zugehörige Planevolute heißt.*) Bei jeder der aufeinanderfolgenden Drehungen wird der Punkt P einen kleinen Kreisbogen beschreiben, der in einer Ebene senkrecht zur momentanen Drehachse liegt und seinen Mittelpunkt auf der Drehachse hat. Die Planevolvente, die der Punkt P beschreibt, durchsetzt also alle Schmiegungsebenen senkrecht. Die Planevolventen sind daher die orthogonalen Trajektorien der Schmiegungsebenen der Planevolute.

Zunächst sieht man, daß jede gegebene Kurve als Planevolvente einer anderen Kurve aufgefaßt werden kann; denn konstruiert man in jedem Punkt der gegebenen Kurve die Normalebene, so umhüllt diese Ebenenschar die abwickelbare Polarfläche der Kurve; die Rückkehrkante dieser Fläche ist nach p. 45 der Ort der Mitten der Schmiegungskugeln. Die gegebene Kurve ist nun offenbar eine Planevolvente dieses Ortes. (Vgl. auch S. 52 Absatz 2.) Es folgt daher der

Satz 3. Jede Kurve kann als Planevolvente aufgefaßt werden, nämlich als Planevolvente des Orts der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln.

Wir schreiten nunmehr zur Lösung der

Aufgabe: Zu einer gegebenen Kurve c die Planevolventen γ zu finden.

---

*) Um Verwechslungen vorzubeugen, sei hier bemerkt, daß, wenn von Evolute oder Evolvente kurzweg die Rede ist, stets die Filar-Evolute bzw. Filar-Evolvente gemeint ist.

Ist der Punkt P mit den Koordinaten x, y, z ein Punkt der Kurve c, Q mit den Koordinaten ξ, η, ζ ein Punkt der Schmiegungsebene, so hat man

(6) $\xi = x + \alpha\varphi + l\psi, \quad \eta = y + \beta\varphi + m\psi, \quad \zeta = z + \gamma\varphi + n\psi,$

wo φ und ψ noch unbestimmte Funktionen des Parameters s sind; denn, da $\Sigma\alpha\lambda = \Sigma l\lambda = 0$ ist, so ist $\Sigma(\xi - x)\lambda = 0$ und der Punkt (ξ, η, ζ) liegt nach § 4, (12) in der Schmiegungsebene. Die Funktionen φ und ψ von s sind nun so zu bestimmen, daß die Tangente der Kurve (6) im Punkt (ξ, η, ζ) auf der Schmiegungsebene von P senkrecht steht. Es ist also

$$\Sigma\alpha\frac{d\xi}{ds} = 0, \quad \Sigma l\frac{d\xi}{ds} = 0. \tag{7}$$

Aus (6) erhält man nun mit Benutzung der Gleichungen § 6, (2), (7) und (9)

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha + \frac{l}{r}\varphi - \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right)\psi + \alpha\frac{d\varphi}{ds} + l\frac{d\psi}{ds},$$

sowie zwei analoge Gleichungen für $\frac{d\eta}{ds}$ und $\frac{d\zeta}{ds}$. Setzt man nun die so gefundenen Werte von $\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}, \frac{d\zeta}{ds}$ in die Gleichungen (7) ein und beachtet Einleitung (11), so erhält man zur Bestimmung der zwei unbekannten Funktionen φ und ψ die simultanen Differentialgleichungen:

$$1 - \frac{\psi}{r} + \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{\varphi}{r} + \frac{d\psi}{ds} = 0$$

oder

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\psi}{r} - 1, \quad \frac{d\psi}{ds} = -\frac{\varphi}{r}. \tag{8}$$

Setzt man hier wie in Aufgabe 3 des § 9 $r\,dt$ statt ds, wo dt der Kontingenzwinkel ist, so folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi - r; \quad \frac{d\psi}{dt} = -\varphi. \tag{9}$$

Zur Integration dieses simultanen Systems differenziere man die zweite Gleichung nach t und setze aus der ersten den Wert von $\frac{d\varphi}{dt}$ in die entstehende Gleichung ein; man erhält so

(10) $$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\psi-r=0.$$

Da die Gleichung $\frac{d^2\psi}{dt^2}+\psi=0$ die beiden partikulären Integrale $\sin t$ und $\cos t$ besitzt, so hat man zur Integration von (10) [Methode der Variation der Konstanten]*) zu setzen

(11) $$\psi=\Phi\cos t+\Psi\sin t,$$

wo Φ und Ψ zwei zu bestimmende Funktionen von t sind. Zwischen Φ und Ψ kann dabei noch eine beliebige Beziehung angenommen werden, da ja über die beiden Funktionen noch gar nichts vorausgesetzt ist. Aus (11) erhält man

(12) $$\frac{d\psi}{dt}=\frac{d\Phi}{dt}\cos t+\frac{d\Psi}{dt}\sin t-\Phi\sin t+\Psi\cos t.$$

Wir setzen nun jene willkürliche Beziehung derart fest, daß

(13) $$\frac{d\Phi}{dt}\cos t+\frac{d\Psi}{dt}\sin t=0.$$

Aus (12) folgt nun mit (13) und (11)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\frac{d\Phi}{dt}\sin t+\frac{d\Psi}{dt}\cos t-\psi,$$

und jetzt aus (10)

(14) $$-\frac{d\Phi}{dt}\sin t+\frac{d\Psi}{dt}\cos t=r.$$

Aus (13) und (14) erhält man

$$\frac{d\Phi}{dt}=-r\sin t,\qquad \frac{d\Psi}{dt}=r\cos t,$$

und hieraus

$$\Phi=-\int r\sin t\,dt,\ \Psi=\int r\cos t\,dt,$$

also nach (11)

(15) $$\psi=-\cos t\int r\sin t\,dt+\sin t\int r\cos t\,dt.$$

---

*) Vgl. S. S. XIII, Schlesinger, „Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen“, 2. Aufl. p. 226 ff.

Aus der zweiten Gleichung (9) und aus (15) ergibt sich

$$\varphi = -\sin t \int r \sin t\, dt - \cos t \int r \cos t\, dt. \tag{16}$$

Damit sind die unbekannten Funktionen bestimmt. Aus (6) (15) und (16) erhält man jetzt als Gleichungen der Planevolventen

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \xi &= x - (\alpha \sin t + l \cos t) \int r \sin t\, dt - (\alpha \cos t - l \sin t) \int r \cos t\, dt, \\ \eta &= y - (\beta \sin t + m \cos t) \int r \sin t\, dt - (\beta \cos t - m \sin t) \int r \cos t\, dt, \\ \zeta &= z - (\gamma \sin t + n \cos t) \int r \sin t\, dt - (\gamma \cos t - n \sin t) \int r \cos t\, dt. \end{aligned} \right.$$

In diesen Gleichungen wäre noch s statt t als Parameter einzuführen durch die Gleichung

$$t = \int \frac{ds}{r},$$

dann sind in (17) ξ, η, ζ Funktionen von s, wo s der Bogen der Planevolute ist. Die beiden in (17) vorkommenden Integrale enthalten zwei willkürliche Konstanten; es gehören also zu einer Planevolute zweifach unendlich viele Planevolventen, was auch geometrisch evident ist. Da die Planevolventen in entsprechenden Punkten parallele Tangenten haben, so nennt man sie auch Parallel-Kurven.

Die Planevolventen führen zu einer wichtigen, sehr allgemeinen Familie von Flächen den sog. Gesimsflächen (Euler, Monge*). In einer Tangentialebene einer

*) Die Gesimsflächen sind zuerst von Euler behandelt worden, vgl.

1. „De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata" (2. Sept. 1776). Nova Acta Academiae Petropolitanae VI, p. 77—94.
2. „Investigatio superficierum, quarum normales ad datum planum productae sint omnes inter se aequales" (28. Dez. 1777). Ebenda X, p. 41—46.
3. „De corporibus cylindricis incurvatis" (21. Sept. 1778). Ebenda, XII, p. 91—100.

Monge hat die Gesimsflächen in den „Feuilles d'Analyse" (No 21—23) weiter untersucht; von ihm rührt auch der Name her (surfaces de moulure).

abwickelbaren Fläche liege eine Kurve γ (Profilkurve); rollt nun diese Ebene in der oben angegebenen Weise an der Fläche ab, so beschreibt die Kurve γ eine Fläche, die man Gesimsfläche nennt. Jeder Punkt von γ beschreibt eine Planevolvente und die Gesimsfläche enthält daher eine einfach unendliche Schar von Parallelkurven. Jede Tangentialebene der abwickelbaren Fläche schneidet aus der Gesimsfläche eine mit der Profilkurve γ kongruente Kurve aus, welche die Schar der Parallelkurven und die Fläche selbst überall senkrecht schneidet. Nimmt man als Kurve γ einen Kreis, so entsteht eine Fläche von einfach unendlich vielen kongruenten Kreisen, deren Ebenen zu dem Ort der Kreismittelpunkte senkrecht stehen. Diese Gesimsfläche spezieller Art heißt eine Röhrenfläche oder Kanalfläche.

Eine Röhrenfläche kann daher auch dadurch erzeugt werden, daß man den Mittelpunkt eines Kreises auf einer Raumkurve sich bewegen läßt, während die Ebene des Kreises beständig die Kurve normal schneidet.

Zu dem Gesimsflächen gehören auch die Rotationsflächen die dadurch entstehen, daß man die Ebene der Profilkurve um eine in der Ebene liegende Gerade dreht.

§ 13. Minimalgeraden, Minimalkurven.

Die bisherigen Entwickelungen bezogen sich ausschließlich auf reelle Kurven; wir besprechen zum Schluß dieses Abschnittes noch eine wichtige Klasse von imaginären Kurven, die späterhin mehrfach benutzt werden. Es sind dies die von Lie*) in die Mathematik eingeführten Minimalkurven, von denen zunächst die einfachsten, die Minimalgeraden behandelt werden sollen.

Jede Fläche zweiter Ordnung schneidet bekanntlich die unendlich ferne Ebene in einer reellen oder imaginären Kurve; nach der Natur dieser Kurven pflegt man ja jene Flächen einzuteilen. Von besonderer Wichtigkeit ist der imaginäre Kreis, nach dem eine Kugel von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird; derselbe spielt bei allen metrischen Fragen eine fundamentale Rolle.

---

*) Lie, „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, I“, Math. Annalen, XIV. Bd., 1879.

Um die Gleichung des unendlich fernen Kugelkreises zu finden, gehen wir aus von der Gleichung einer Kugel mit dem Radius a und dem Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0)

$$(1) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2.$$

Ersetzt man hier x, y, z bezüglich durch $\frac{x'}{t}, \frac{y'}{t}, \frac{z'}{t}$, so erhält man die Kugelgleichung in den sogenannten homogenen Koordinaten*) x', y', z', t in der Form

$$(2) \qquad (x'-x_0 t)^2+(y'-y_0 t)^2+(z'-z_0 t)^2=a^2 t^2.$$

Dem Wert $t=0$ entsprechen unendlich ferne Punkte des Raumes; $t=0$ ist also die Gleichung der unendlich fernen Ebene. Gleichung (2) wird nun offenbar befriedigt durch

$$(3) \qquad x'^2+y'^2+z'^2=0, \quad t=0.$$

Diese sind also die Gleichungen des unendlich fernen Kugelkreises. Da sie unabhängig vom Radius und von den Koordinaten des Mittelpunkts der Kugel sind, so folgt, daß alle Kugeln durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis hindurchgehen. Umgekehrt sieht man leicht ein, daß jede Fläche zweiter Ordnung, die den unendlich fernen imaginären Kugelkreis enthält, notwendig eine Kugel ist. Die erste Gleichung (3) stellt, wenn wir sie wieder in den ursprünglichen Koordinaten x, y, z schreiben

$$(4) \qquad x^2+y^2+z^2=0,$$

eine Kugel vom Radius Null um den Mittelpunkt des Koordinatensystems dar (Nullkugel). Gleichung (4) kann aber auch — und dies ist für uns wichtiger — als Gleichung eines Kegels gedeutet werden, dessen Mantellinien den Ursprung des Koordinatensystems mit allen Punkten des unendlich fernen Kugelkreises verbinden oder der den unendlich fernen Kugelkreis vom Ursprung aus projiziert. Verschiebt man diesen Kegel parallel mit sich

---

*) Vergl. S. S. XXV. Simon, Analytische Geometrie des Raumes, II, § 1.

selbst, bis seine Spitze in den Kugelmittelpunkt (x_0, y_0, z_0) fällt, so lautet die Gleichung:

$$(5) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0.$$

Dieser Kegel geht ebenfalls durch den unendlich fernen Kugelkreis hindurch, wie man sich leicht überzeugt, wenn man statt x, y, z wieder die homogenen Koordinaten $\frac{x'}{t}, \frac{y'}{t}, \frac{z'}{t}$ schreibt und $t=0$ setzt. Die Gleichung (5) sagt aus, daß jeder Punkt (x, y, z) des Kegels von der Kegelspitze (x_0, y_0, z_0) einen Abstand gleich Null hat. Die Mantellinien des Kegels heißen aus diesem Grund Geraden von der Länge Null oder Minimalgeraden. Es folgt der

Satz 1. Durch jeden Raumpunkt (x_0, y_0, z_0) gehen unendlich viele Minimalgeraden; dieselben treffen alle den unendlich fernen Kugelkreis und sind Mantellinien des Kegels, welcher vom Punkt $x_0, y_0, z_0)$ den unendlich fernen Kugelkreis projiziert. Die Minimalgeraden sind alle imaginär.

Ist v ein veränderlicher Parameter, so stellen die Gleichungen

$$(6) \qquad x=x_0+\alpha v, \; y=y_0+\beta v, \; z=z_0+\gamma v$$

eine Minimalgerade durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) dar, wenn die Größen α, β, γ der Gleichung

$$(7) \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

genügen; denn die Gleichung (5) ist dann durch die aus (6) sich ergebenden Werte der Koordinaten x, y, z für alle Werte von v erfüllt.

Man gelangt noch auf eine andere Art zu den Minimalgeraden. Man kann nämlich jede Fläche zweiter Ordnung als Regelfläche mit zwei Scharen von Erzeugenden auffassen, wenn man auch imaginäre Erzeugende zuläßt.*) Beim einmantligen Hyperboloid z. B. sind diese Scharen reell, beim Ellipsoid dagegen und speziell bei der Kugel

*) Vgl. S. S. XXV. Simon, Analytische Geometrie des Raumes. II, § 6.

imaginär. Die unendlich fernen Punkte dieser imaginären Erzeugenden der Kugel bilden nun der Definition nach den unendlich fernen imaginären Kugelkreis.

Daraus folgt

Satz 2. Die imaginären Erzeugenden der Kugel sind lauter Minimalgeraden. Die durch einen beliebigen Raumpunkt mit jenen Erzeugenden gezogenen Parallelen projizieren den unendlich fernen Kugelkreis und bilden einen Kegel zweiter Ordnung (Richtkegel); seine Mantellinien sind die durch jenen Punkt gehenden Minimalgeraden.

Wir zeigen dies auch analytisch und gelangen dadurch zu einer zweiten analytischen Darstellung der Minimalgraden. Da der Mittelpunkt und Radius der Kugel unwesentlich sind, gehen wir der Einfachheit halber aus von der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{8}$$

Um die Gleichungen der geradlinigen Erzeugenden zu erhalten, setzen wir statt (8) die beiden Gleichungen

$$\frac{x + iy}{1 - z} = \frac{1 + z}{x - iy} = u \tag{9}$$

oder

$$\frac{x - iy}{1 - z} = \frac{1 + z}{x + iy} = -\frac{1}{v}. \tag{10}$$

Die Gleichungen (9) stellen für jeden Wert von u eine auf der Kugel (8) liegende Gerade dar, ebenso (10) für jeden Wert von v. Die Gleichungen (9) definieren daher die erste Schar der imaginären Kugelerzeugenden, die Gleichungen (10) die zweite Schar. Man sieht sofort, daß beide Scharen Minimalgeraden sind; denn die durch den Ursprung parallel zu der Schar (9) gezogenen Parallelen haben die Gleichungen:

$$\frac{x + iy}{-z} = \frac{z}{x - iy} = u, \tag{11}$$

und diese Geraden liegen alle auf dem Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Dasselbe ergibt sich für die Schar (10). Aus (11)

folgt aber $x:y:z = \frac{1-u^2}{2} : \frac{i(1+u^2)}{2} : u$ oder, wenn w einen Proportionalitätsfaktor bedeutet,

$$(12) \qquad x = \frac{w}{2}(1-u^2),\ y = \frac{iw}{2}(1+u^2),\ z = wu.$$

Diese Gleichungen sind mit (4) vollkommen äquivalent, und sind daher die Gleichungen der durch den Ursprung gehenden Minimalgeraden; jedem Werte von u in (12) entspricht eine einzelne Minimalgerade. Für die durch den Raumpunkt (x_0, y_0, z_0) gehenden Minimalgeraden erhält man die Gleichungen

$$(13) \quad x = x_0 + \frac{w}{2}(1-u^2),\ y = y_0 + \frac{iw}{2}(1+u^2),\ z = z_0 + wu;$$

denn (5) ist durch die aus (13) zu entnehmenden Werte identisch erfüllt. Jedem Wert von u in (13) entspricht eine einzelne Minimalgerade; w ist dabei der Parameter.

Bemerkung. An die Gleichungen (9) und (10) der imaginären Kugelerzeugenden schließt sich eine wichtige Darstellung der Koordinaten x, y, z der Kugel als Funktionen der Parameter u und v der Kugelerzeugenden an. Aus (9) und (10) folgt nämlich durch Auflösen

$$(14) \qquad x = \frac{1-uv}{u-v},\ y = \frac{i(1+uv)}{u-v},\ z = \frac{u+v}{u-v}.$$

Diese Werte befriedigen die Gleichung (8) für alle Werte von u und v, die Gleichungen (14) stellen daher die Kugel (8) dar. Ist in (14) u konstant, v veränderlich, so durchläuft der Punkt (x, y, z) eine Kugelerzeugende der ersten Schar; analog wenn v konstant und u veränderlich ist. Um aus (14) reelle Kugelpunkte zu erhalten, muß, wie aus (9) und (10) ersichtlich ist, für den Parameter u eine komplexe Größe genommen werden und für $-\frac{1}{v}$ die dazu konjugierte. Die Darstellung (14) ist bereits in § 8 am Schluß benutzt worden.

Minimalkurven (Minimallinien) nennt man diejenigen (imaginären) Kurven, deren Tangenten Minimalgeraden sind, oder den unendlich fernen imaginären Kugel-

kreis schneiden. Diese Kurven sind für die späteren Untersuchungen (konforme Abbildung, Minimalflächen) von Wichtigkeit. Um die Gleichungen einer Minimalkurve zu finden, suchen wir die Bedingung, der die Koordinaten x, y, z eines ihrer Punkte, als Funktionen eines Parameters u betrachtet, genügen müssen. Die Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z) lauten nach § 2, (7)

$$X = x + v\alpha,\ Y = y + v\beta,\ Z = z + v\gamma.$$

Soll diese Tangente eine Minimalgerade sein, so muß nach (7)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

sein, oder nach § 2, (3) und (5)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0, \text{ d. h. } ds = 0 \tag{15}$$

sein. Die Minimalkurven sind daher Kurven von der Länge Null; diese Eigenschaft wird oft als Definition an die Spitze gestellt.

Schreibt man (15) in der Form

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 0, \tag{16}$$

so zeigt die Vergleichung mit (12) und (4), daß (16) befriedigt wird, wenn

$$\frac{dx}{du} = \frac{w}{2}(1 - u^2),\ \frac{dy}{du} = \frac{iw}{2}(1 + u^2),\ \frac{dz}{du} = wu \tag{17}$$

gesetzt wird, wobei w noch eine ganz willkürliche Funktion von u bedeutet. Bezeichnen wir diese mit $F(u)$, so erhalten wir aus (17) durch Quadratur als Gleichungen der Minimalkurven

$$x = \frac{1}{2}\int (1 - u^2) F(u)\, du,\ y = \frac{i}{2}\int (1 + u^2) F(u)\, du, \tag{18}$$
$$z = \int u F(u)\, du.$$

Ersetzt man $F(u)$ in (18) durch die dritte Ableitung einer anderen Funktion $f(u)$, also durch $f'''(u)$, so lassen sich die Quadraturen in (18) durch Integration nach Teilen ausführen, und man erhält die Gleichungen der Minimalkurven in der Form

$$
(19) \qquad \begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(1-u^2)f''(u)+f'(u)-f(u),\\
y &= \frac{i}{2}(1+u^2)f''(u)-iuf'(u)+if(u),\\
z &= uf''(u)-f'(u).
\end{aligned}
$$

Wir formulieren das Resultat in dem

Satz 3. Alle nicht geradlinigen Minimalkurven lassen sich durch den Parameter u in der Form (18) oder (19) darstellen unter der Voraussetzung, daß die Funktion $F(u)$ bezw. $f'''(u)$ nicht gleich Null ist.

Da die abwickelbare Tangentenfläche jeder Minimalkurve den unendlich fernen Kugelkreis enthält, so sieht man, daß die Schmiegungsebene in irgend einem Punkt einer Minimalkurve den unendlich fernen Kugelkreis berührt, was auch analytisch leicht bestätigt wird.

§ 14. Übungsaufgaben zu Abschnitt I.

Die Nummern der für die Lösung zur Anwendung kommenden Paragraphen sind in Klammern beigesetzt.

1. Man stelle die Gleichungen der Kurve auf, welche die Meridiane einer Kugel unter konstantem Winkel trifft (Loxodrome). Man projiziere diese Kurve von einem Pol aus auf die Ebene des Äquators und zeige, daß die projizierte Kurve eine logarithmische Spirale ist und darum die projizierten Meridiane ebenfalls unter konstantem Winkel trifft (1, 2).

Bedeutet u die Länge des Parallelkreisradius, v die geographische Länge eines Punkts der Kugel vom Radius 1, so hat man für die Koordinaten x, y, z des Punkts

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \sqrt{1-u^2} \quad \text{(Näheres s. Bd. II, § 1).}$$

Jedem Wertepaar u, v entspricht ein Kugelpunkt. Ist v konstant, so stellen die Gleichungen den durch den Punkt (u, v) gehenden Meridian dar. Faßt man v als Funktion von u auf, so erhält man eine Kurve auf der Kugel. Diese Funktion ist nun so zu bestimmen, daß den Bedingungen der Aufgabe genügt wird.

2. Man stelle die Gleichungen der Kurve auf, welche die Mantellinien eines Rotationskegels unter konstantem

Winkel schneidet (konische Spirale) und bestimme das sphärische Bild der Tangenten derselben (Kreis) (1, 2, 3). Man zeige, daß ihre Projektion auf eine Ebene, die die Kegelachse senkrecht schneidet, eine logarithmische Spirale ist. Die Hauptnormale schneidet die Kegelachse überall senkrecht. Das Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung ist konstant (3—6). Nach Aufg. 3 von § 9 kann daher die konische Spirale auch als Schraubenlinie eines Zylinders aufgefaßt werden. In der Tat ist die rektifizierende Fläche ein Zylinder, der auf der xy-Ebene senkrecht steht und aus ihr die oben genannte logarithmische Spirale ausschneidet (Beweis!) (11).

Wie in (1) kann man den Rotationskegel darstellen durch die Gleichungen

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cu.$$

Man fasse nun u und v als Funktionen des Bogens s der Raumkurve auf und bestimme dieselben.

3. Gehen die Normalebenen einer Kurve alle durch einen Punkt, so liegt die Kurve auf einer Kugel.

4. Die Projektion einer Raumkurve auf die Normalebene eines ihrer Punkte hat in dem betreffenden Punkt einen Rückkehrpunkt mit der Hauptnormale als Rückkehrtangente. Die Projektion einer Raumkurve auf die Schmiegungsebene berührt die Tangente zweipunktig. Die Projektion einer Raumkurve auf die rektifizierende Ebene hat in dem betreffenden Punkte einen Wendepunkt mit der Kurventangente als Wendetangente (4).

Zum Beweis nehme man als Ursprung des Koordinatensystems den betrachteten Punkt der Raumkurve und als x-, y-, z-Achse bezüglich die Tangente, Hauptnormale und Binormale. Entwickelt man x, y, z nach Potenzen des Parameters u, so erhält man

$$x = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots, \; y = b_2 u^2 + b_3 u^3 + \ldots, \; z = c_3 u^3 + \ldots,$$

woraus mit Leichtigkeit die Richtigkeit der Sätze folgt.

5. Die Projektion des Mittelpunkts der oskulierenden Kugel auf die Schmiegungsebene ist der Krümmungsmittelpunkt (4, 6).

6. Ist S der Bogen des Orts der Krümmungsmittelpunkte, so ist

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\tau^2, \quad dS = R' d\tau,$$

wo R' den Radius der Schmiegungskugel bedeutet (4, 5, 6).

7. Ist $d\sigma$ der Winkel von zwei konsekutiven Hauptnormalen, so ist

$$d\sigma^2 = dt^2 + d\tau^2 \quad (4, 5, 6).$$

8. Ist der Radius der Schmiegungskugel konstant, so liegt die Kurve auf einer Kugel (oder Ebene) (6).

Man zeigt leicht, daß die Gleichung $\frac{d(R'^2)}{ds} = 0$ die Gleichungen $\frac{dX'}{ds} = \frac{dY'}{ds} = \frac{dZ'}{ds} = 0$ zur Folge hat.

9. Man bestimme die Punkte einer Raumkurve, in denen die Schmiegungsebene vier konsekutive Punkte mit der Kurve gemein hat (stationäre Ebene) (5).

10. Die Schraubenlinie des allgemeinen Zylinders zu untersuchen (2, 3, 5, 6).

Ist s_1 die Bogenlänge der Kurve, die der Cylinder aus der xy-Ebene ausschneidet, so lauten die Gleichungen der allgemeinen Schraubenlinie

$$x = x(s_1), \; y = y(s_1), \; z = cs_1,$$

wo außerdem noch

$$\left(\frac{dx}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_1}\right)^2 = 1$$

ist.

11 Die Kurven zu bestimmen, deren Tangenten den Erzeugenden eines Rotationskegels parallel laufen (9).

12. Die Gleichungen der Kurven zu bestimmen, für die r konstant $= a$ ist (9).

Aus § 6, (3) erhält man

$$\alpha = \frac{1}{a}\int l ds, \quad \beta = \frac{1}{a}\int m ds, \; \gamma = \frac{1}{a}\int n ds,$$

wo l, m, n drei Funktionen von s sind, derart, daß $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ und $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ist. Drei solche Funktionen erhält man, wenn man setzt

$$\int l ds = L, \quad \int m ds = M, \quad \int n ds = N.$$

Es muß jetzt sein

$$L^2 + M^2 + N^2 = a^2, \quad \left(\frac{dL}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dM}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dN}{ds}\right)^2 = 1.$$

Man kann nun L, M, N als Koordinaten eines Punkts einer Kugel vom Radius a auffassen und $\frac{dL}{ds}, \frac{dM}{ds}, \frac{dN}{ds}$ als die Richtungs-

kosinus der Tangente einer beliebigen auf dieser Kugel gezogenen Kurve. Da nun

$$\alpha = \frac{L}{a}, \quad \beta = \frac{M}{a}, \quad \gamma = \frac{N}{a},$$

so hat man nach § 6, (2)

$$x = \frac{1}{a}\int L ds, \ y = \frac{1}{a}\int M ds, \ z = \frac{1}{a}\int N ds.$$

13. Die Gleichungen der Kurven zu bestimmen für die ϱ konstant $= a$ ist (9).

Aus § 6, (8) erhält man

$$\lambda = \frac{1}{a}\int l ds, \ \mu = \frac{1}{a}\int m ds, \ \nu = \frac{1}{a}\int n ds,$$

wo l, m, n drei Funktionen von s sind, derart, daß $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ und $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.

Mit denselben Bezeichnungen wie vorher erhält man:

$$\lambda = \frac{L}{a}, \quad \mu = \frac{M}{a}, \quad \nu = \frac{N}{a}.$$

Man kennt jetzt das sphärische Bild der Binormalen und verfahre daher nach § 9, Aufg. 5.

Die Lösung ist

$$x = \frac{1}{a}\int\left(N\frac{dM}{ds} - M\frac{dN}{ds}\right)ds, \quad y = \frac{1}{a}\int\left(L\frac{dN}{ds} - N\frac{dL}{ds}\right)ds,$$

$$z = \frac{1}{a}\int\left(M\frac{dL}{ds} - L\frac{dM}{ds}\right)ds.$$

Bemerkung. Aus den Formeln der Aufgabe (12) und (13) folgt der

Satz: Jeder Kurve konstanter erster Krümmung $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\right)$ läßt sich eine Kurve von derselben konstanten zweiten Krümmung $\left(\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}\right)$ punktweise so zuordnen, daß in entsprechenden Punkten die Hauptnormalen parallel, die Tangente der einen Kurve der Binormalen der andern Kurve parallel ist und umgekehrt; überdies ist der Bogen zwischen zwei Punkten der einen Kurve gleich dem Bogen zwischen den entsprechenden Punkten der andern Kurve.

14. Haben zwei Kurven dieselben Hauptnormalen (Bertrandsche*) Kurven), so besteht für jede Kurve eine

*) Bertrand, Journal de Mathématiques, Bd. 15, 1850, S. 343.

Relation von der Form $\frac{A}{r} + \frac{B}{\varrho} + C = 0$, wo A, B, C Konstanten sind (6).

Die erste Kurve habe zu Gleichungen $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$; dann hat die zweite die Gleichungen $x_1 = x + kl$ u. s. w., wo k zunächst eine Funktion von u ist. Man stelle nun zuerst die Bedingung auf, daß die Tangente der zweiten Kurve auf der Richtung l, m, n senkrecht steht; es ergibt sich $k =$ konst. Berechnet man die Werte für die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ der Tangente der zweiten Kurve (§ 6), so erhält man

$$\alpha_1 = \alpha \cos \sigma + \lambda \sin \sigma, \quad \beta_1 = \beta \cos \sigma + \mu \sin \sigma, \quad \gamma_1 = \gamma \cos \sigma + \nu \sin \sigma,$$

wenn zur Abkürzung

$$\cos \sigma = \frac{1 - \frac{k}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{k}{r}\right)^2 + \frac{k^2}{\varrho^2}}}, \qquad \sin \sigma = \frac{-\frac{k}{\varrho}}{\sqrt{\left(1 - \frac{k}{r}\right)^2 + \frac{k^2}{\varrho^2}}}$$

gesetzt wird. σ bedeutet den Winkel der beiden in zwei entsprechenden Punkten der zwei Kurven gezogenen Tangenten. Jetzt berechne man nach § 6 die Richtungskosinus l_1, m_1, n_1 der Hauptnormalen der zweiten Kurve; da diese Richtung auf der Richtung (α, β, γ) und (λ, μ, ν) senkrecht stehen soll, so folgt $\Sigma \alpha l_1 = \Sigma \lambda l_1 = 0$ und hieraus $\frac{d\sigma}{ds} = 0$ d. h. $\sigma =$ konst. Aus den Definitionsgleichungen für σ folgt jetzt: $\frac{k \sin \sigma}{r} - \frac{k \cos \sigma}{\varrho} - \sin \sigma = 0$, womit der Beweis geliefert ist. Weiteres über Bertrandsche Kurven s. Bianchi § 20 oder Lilienthal I Bd. 2. Tl. § 22.

15. Ein Kreis berühre eine Kurve zweiter Ordnung in einem Scheitel, jedoch so, daß beide Kurven in verschiedenen Ebenen liegen. Es soll gezeigt werden, daß die durch beide Kurven gehende abwickelbare Fläche ein Kegel zweiter Ordnung ist. Welches ist der Ort der Kegelspitzen, wenn sich der Kreis um die Scheiteltangente des Kegelschnitts dreht (10)?

Die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung sei $y^2 = a_{11} x^2 + 2 a_{12} x_1$, $z = 0$, die des Kreises $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, $x = \lambda z$, so berühren sich beide Kurven im Ursprung und die y-Achse ist die gemeinsame Tangente. Man schneide nun die Ebene $ux + vy + wz = 1$ mit der Ellipse und mit dem Kreis und stelle die Bedingung auf, daß je die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Es bestimmen sich so v und w als Funktionen des Parameters u. Jetzt verfahre man nach den Angaben des § 10.

16. Man beweise, daß das begleitende Dreikant einer Raumkurve aus einer Lage in die nächstfolgende durch eine infinitesimale Schraubung gebracht werden kann, wobei die Achse der Schraubenbewegung die Gerade ist, welche die zwei konsekutiven Hauptnormalen senkrecht schneidet (§ 6).

Zum Beweis bestimme man die Richtungskosinus der Achse sowie die Koordinaten der Schnittpunkte der Achse mit den beiden konsekutiven Hauptnormalen. Mit Hilfe der Formeln des § 6 zeigt man nun leicht, daß die beiden konsekutiven Tangenten (und ebenso die Binormalen) gegen die Achse gleich geneigt sind. Daraus folgt, daß durch passende (um den Winkel $d\sigma$ s. Aufgabe 7.) Drehung um die Achse die beiden Dreikante in parallele Lage gebracht werden können. Da man nun findet, daß das Stück der ersten Hauptnormalen bis zur Achse gleich dem entsprechenden der zweiten ist, so kommen nun durch eine Parallelverschiebung längs der Achse die beiden Dreikante zur Deckung. Aus dem Satz ergibt sich, daß man an die Stelle der Raumkurve in der nächsten Umgebung eines Punktes eine Kreiscylinderschraubenlinie setzen kann. Die Achse dieser ist die Achse der infinitesimalen Schraubung, ihr Grundkreisradius R ist $=\frac{r\varrho^2}{r^2+\varrho^2}$ und der Neigungswinkel ε der Schraubenlinie gegen die Achse ergibt sich aus $tg\,\varepsilon=\frac{\varrho}{r}$. Diese Schraubenlinie hat mit der Kurve in dem betrachteten Punkt Krümmung und Torsion gemein.

17. Man bestimme die Gleichungen der abwickelbaren Flächen für die Schraubenlinie des Kreiszylinders (11).

18. Man bilde für die Rückkehrkante C' der abwickelbaren Polarfläche einer Raumkurve C die Richtungskosinus der Kanten des begleitenden Dreikants (6, 11) und beweise folgende Sätze:

a) Die Hauptnormalen der Kurven C und C' in entsprechenden Punkten sind parallel.

b) Die Binormale jeder Kurve ist parallel der Tangente der anderen.

c) Der Kontingenzwinkel der einen Kurve ist gleich dem Torsionswinkel der anderen. Warum darf man daraus nicht schließen, daß die Krümmung der einen Kurve gleich der Torsion der anderen ist?

d) Das Produkt der Krümmungen beider Kurven ist gleich dem Produkt ihrer Torsionen.

19. In der xy-Ebene liege eine beliebige Kurve K. Man bestimme eine abwickelbare Fläche, welche die K ent-

hält und deren Berührungsebenen gegen die xy-Ebene alle gleich geneigt sind (Fläche von gleichförmiger Neigung oder Böschungsfläche). Man zeige, daß die Rückkehrkante eine Evolute von K ist, also auf dem Zylinder liegt, der über der ebenen Evolute von K senkrecht zur xy-Ebene errichtet ist (vgl. § 12). Die Rückkehrkante ist eine Schraubenlinie dieses Zylinders. Die Böschungsflächen sind demnach identisch mit den Tangentenflächen der allgemeinen Schraubenlinien (10—12).

Die Böschungsfläche ist die Enveloppe der Ebenenschar mit der Gleichung

$$x \cos u + y \sin u + z \operatorname{ctg} \vartheta + f(u) = 0.$$

Die Gerade $x \cos u + y \sin u + f(u) = 0$ in der xy-Ebene hüllt die gegebene Kurve K ein, ϑ ist der Neigungswinkel der Ebenen gegen die xy-Ebene. In Fig. 7a ist $AQQ'Q''$ die Kurve K. $AP_1P_1'P_1''$ ihre ebene Evolute, $APP'P''$ die Rückkehrkante der Böschungsfläche.

20. Man beweise folgende Sätze:

a) Die Tangente der Evolvente ist parallel der Hauptnormalen der Evolute.

b) Die Binormale der Evolvente ist parallel der rektifizierenden Geraden (d. h. Schnittgerade konsekutiver rektifizierender Ebenen) der Evolute (leicht auch geometrisch aus a).

c) Befindet sich unter den Evoluten eine ebene Evolute, so ist die Evolvente selbst eben (12).

21. Die Tangente einer Planevolvente ist parallel der Binormalen, ihre Hauptnormale parallel der Hauptnormalen, ihre Binormale parallel der Tangente der Ausgangskurve in dem entsprechenden Punkt (12).

22. Gesucht sind die Gleichungen der orthogonalen Trajektorien der Normalebenen einer Raumkurve C (Parallelkurven zu C) (12).

Die gesuchten Kurven sind die Planevolventen des Orts der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln von C.

23. Die Parallelkurven einer Schraubenlinie sind wieder Schraubenlinien (12).

II. Abschnitt.

Untersuchung einer Fläche in der ersten Form $F(x, y, z)=0$.

§ 15. Linien- und Flächenelement, Tangentialebene, Normale.

Eine Fläche ist entweder bestimmt durch eine einzige Gleichung zwischen den Punktkoordinaten x, y, z

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

oder dadurch, daß die Koordinaten x, y, z, eines Punktes als Funktionen von zwei Parametern u, v gegeben sind

$$x=f(u, v), \quad y=\varphi(u, v), \quad z=\psi(u, v). \tag{2}$$

Die Elimination von u und v aus (2) führt auf die Form (1) zurück. Wir legen in diesem Abschnitt die Form (1) zu Grunde und übertragen im I. Abschnitt des II. Bandes die Resultate auf die Form (2).

Für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von F nach x, y, z führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=F_2, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=F_3;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F_{11}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}=F_{12}=F_{21}, \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=F_{33}.$$

Ist P ein beliebiger Punkt auf der Fläche mit den Koordinaten x, y, z und P' ein ihm unendlich benachbarter Punkt der Fläche mit den Koordinaten

$$x + dx,\ y + dy,\ z + dz, \tag{3}$$

so gilt außer (1) die Gleichung

$$F(x + dx,\ y + dy,\ z + dz) = 0,$$

oder, wenn man die linke Seite nach Potenzen von dx, dy, dz in eine Reihe entwickelt, die höheren Potenzen dieser Differentiale gegen die ersten vernachlässigt und (1) benützt

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = 0. \tag{4}$$

Die linke Seite ist das totale Differential von $F(x, y, z)$. Hat man auf der Fläche noch einen dritten Punkt P'', der P' unendlich benachbart ist, mit den Koordinaten

$$x + 2dx + d^2x,\quad y + 2dy + d^2y,\quad z + 2dz + d^2z \tag{5}$$

und setzt man diese Werte statt x, y, z in (1) ein, so erhält man eine weitere Gleichung. Entwickelt man die linke Seite derselben wie vorhin und vernachlässigt alle Glieder, die unendlich klein von höherer als der zweiten Ordnung sind, so ergibt sich unter Beachtung von (1) und (4)

$$dF_1\,dx + dF_2\,dy + dF_3\,dz + F_1\,d^2x + F_2\,d^2y + F_3\,d^2z = 0, \tag{6}$$

wo

$$\begin{aligned} dF_1 &= F_{11}\,dx + F_{12}\,dy + F_{13}\,dz,\\ dF_2 &= F_{21}\,dx + F_{22}\,dy + F_{23}\,dz,\\ dF_3 &= F_{31}\,dx + F_{32}\,dy + F_{33}\,dz. \end{aligned} \tag{6a}$$

Die Gleichung (6) ergibt sich auch durch totale Differentiation von (4). Die Relationen (4) und (6) zwischen den Koordinaten x, y, z und ihren ersten und zweiten Differentialen werden im folgenden viel benutzt. Es ist also zu beachten, daß ein Punkt P' mit den Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, der dem Flächenpunkt $P(x, y, z)$ unendlich benachbart ist, dann und nur dann auf der Fläche liegt, wenn die Differentiale dx, dy, dz der Gleichung (4) genügen. Ebenso liegt ein dem Punkt P' unendlich benachbarter Punkt P'' dann und nur dann auf der Fläche, wenn die ersten und zweiten Differentiale in (5) den Gleichungen (4) und (6) genügen.

Wir untersuchen nun die Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte. Wie bei den Raumkurven diese Betrachtung auf zwei *Kurven* (Tangente und Krüm-

mungskreis) führt, welche in der unmittelbaren Nachbarschaft die Kurve ersetzen können, so werden wir analog bei Flächen auf einfachere Flächen kommen, welche gewisse Eigenschaften der Fläche in der Nähe des Punktes wiedergeben. Beschränken wir uns auf unendlich kleine Größen erster Ordnung, so erhalten wir als erste Annäherungsfläche eine Ebene, die Tangentialebene; ziehen wir auch noch die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung bei, so ergibt sich als zweite Annäherungsfläche ein Paraboloid, das Schmiegungsparaboloid.

Zunächst beschränken wir uns auf die Gebilde, die bestimmt sind durch den Punkt P (x, y, z) und einen Nachbarpunkt P' $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Wir definieren analog wie bei den Kurven (vgl. § 2):

Erklärung: Die unendlich kleine, in der Fläche liegende Verbindungsstrecke zweier unendlich benachbarten Flächenpunkte P und P' heißt ein Linienelement oder Bogenelement der Fläche im Punkte P; man bezeichnet dasselbe mit $ds = PP'$.

Es ist nun, genau wie in § 2,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich, wie für spätere Benutzung schon hier bemerkt sei, durch Differentiation folgende Beziehung zwischen den ersten und zweiten Differentialen

$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z\,. \tag{8}$$

Bezeichnet man die Richtungskosinus des Linienelements $PP' = ds$ mit α, β, γ, so ist nach § 2, (5)

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}\,. \tag{9}$$

Als Tangente der Fläche definieren wir die Verbindungslinie zweier unendlich benachbarten Flächenpunkte. Ihre Gleichung ist (vergl. § 2) in X, Y, Z als laufenden Koordinaten

$$(X - x) : (Y - y) : (Z - z) = \alpha : \beta : \gamma, \tag{10}$$

wo für α, β, γ die Werte aus (9) einzusetzen sind.

Für die Richtungskosinus α, β, γ folgt aus (4) und (9) die Beziehung

$$\alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 = 0; \tag{11}$$

außerdem ist nach Einl. (2)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{12}$$

Zwischen den drei Größen α, β, γ bestehen nur diese zwei Gleichungen; es gibt somit für einen Flächenpunkt unendlich viele Wertsysteme α, β, γ und damit auch unendlich viele durch ihn gehende Linienelemente und Flächentangenten. Sind ds_1 und ds_2 zwei derselben, so ergibt sich für den von zwei Linienelementen eingeschlossenen Winkel, den wir mit (ds_1, ds_2) bezeichnen, nach Einl. (6)

$$\cos(ds_1, ds_2) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2, \tag{13}$$

wo α_1, β_1. γ_1; α_2, β_2, γ_2 die Richtungskosinus von ds_1 und ds_2 sind. Nach (9) folgt weiter

$$\cos(ds_1, ds_2) = \frac{dx_1\, dx_2 + dy_1\, dy_2 + dz_1\, dz_2}{ds_1\, ds_2} = \frac{\Sigma\, dx_1\, dx_2}{ds_1\, ds_2}, \tag{14}$$

wenn hier, wie später, für eine Summe, die in x, y, z symmetrisch gebildet ist, zur Abkürzung nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben wird.

Aus (14) erhält man für $\sin(ds_1, ds_2)$ in derselben Abkürzung den Ausdruck:

$$\sin^2(ds_1, ds_2) = \frac{\Sigma\, dx_1^2\; \Sigma\, dx_2^2 - (\Sigma\, dx_1\, dx_2)^2}{ds_1^2\; ds_2^2}, \tag{15}$$

oder nach Einl. (15)

$$\sin^2(ds_1, ds_2) = \frac{\sum \begin{vmatrix} dy_1 & dz_1 \\ dy_2 & dz_2 \end{vmatrix}^2}{ds_1^2\; ds_2^2}. \tag{16}$$

Die beiden Linienelemente stehen aufeinander senkrecht, wenn $\cos(ds_1\, ds_2) = 0$ ist, also nach (14), wenn

$$\Sigma\, dx_1\, dx_2 = 0 \tag{17}$$

ist.

Hieran schließt sich die Aufstellung des Oberflächenelements dJ. Wir definieren dasselbe als den Inhalt des unendlich kleinen Parallelogramms, von dem ds_1 und ds_2 zwei anstoßende Seiten sind.

Es ist also

$$dJ = \sin(ds_1, ds_2)\, ds_1\, ds_2 \tag{18}$$

wobei die Werte aus (15) und (7) einzutragen sind.

Wie wir gesehen haben, gehen durch jeden Flächenpunkt unendlich viele Tangenten. Den geometrischen Ort derselben erhält man, wenn man in (11) für die Richtungskosinus α, β, γ die ihnen proportionalen Werte aus den Tangentengleichungen (10) einträgt; es ergibt sich

$$(X - x) F_1 + (Y - y) F_2 + (Z - z) F_3 = 0. \tag{19}$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, wir haben also

Satz 1. Alle Tangenten der Fläche $F(x,y,z) = 0$ in einem Punkt $P(x,y,z)$ liegen in einer Ebene; diese Ebene heißt die Tangentialebene (Tangentenebene, Berührungsebene) der Fläche im Punkt P*); sie ist durch Gleichung (19) gegeben.

Da in der Tangentialebene offenbar auch alle durch P gehenden Linienelemente und damit alle Nachbarpunkte des Punktes P liegen, so ist sie als erste Annäherungsfläche zu bezeichnen.

Anmerkung. Es kann für spezielle Punkte einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung (19) der Tangentialebene dadurch illusorisch werden, daß für einen solchen Punkt F_1, F_2 und F_3 verschwinden. Solche Punkte heißen singuläre. Ohne auf sie näher einzugehen, bemerken wir hier, daß für einen solchen Punkt die erste Annäherungsfläche nicht eine Ebene, sondern im allgemeinen ein Kegel zweiter Ordnung ist. Denn in diesem Fall tritt an die Stelle von (4) die Gleichung

$$F_{11} dx^2 + F_{22} dy^2 + F_{33} dz^2 + 2 F_{23} dy\, dz + 2 F_{31} dz\, dx + 2 F_{12} dx\, dy = 0.$$

Hieraus folgt nach (9) und (10) als geometrischer Ort für die Tangenten

$$\begin{aligned} F_{11}(X-x)^2 + F_{22}(Y-y)^2 + F_{33}(Z-z)^2 \\ + 2F_{23}(Y-y)(Z-z) + 2F_{31}(Z-z)(X-x) \\ + 2F_{12}(X-x)(Y-y) = 0, \end{aligned}$$

d. h. ein Kegel zweiter Ordnung.

Durch die Tangentialebene ist zugleich die Normale der Fläche bestimmt, d. h. die Gerade (PN in Fig. 8), die in P auf der Tangentialebene senkrecht steht. Bezeichnet

*) In Fig. 8 mit T bezeichnet.

man ihre Richtungskosinus mit a, b, c, so ist nach (19) und Einl. (5)

(20) $$a : b : c = F_1 : F_2 : F_3, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Setzen wir

(21) $$\frac{1}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}} = V,$$

so ist

(22) $$a = VF_1, \quad b = VF_2, \quad c = VF_3.$$

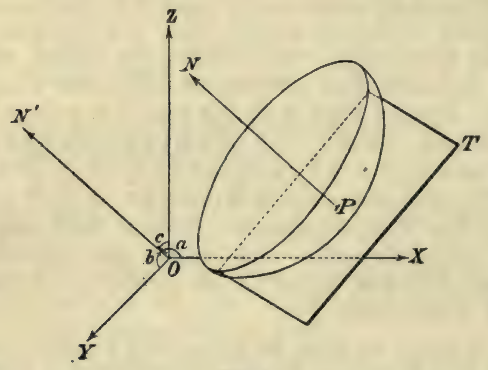


Fig. 8.

Die Gleichungen der Normalen im Punkt x, y, z sind

(23) $$(X - x) : (Y - y) : (Z - z) = a : b : c = F_1 : F_2 : F_3.$$

Jede Ebene, welche die Normale enthält, heißt eine Normalebene der Fläche, ihre Schnittkurve mit der Fläche ein Normalschnitt. P heißt der Fußpunkt der Normalen.

Anmerkung. Die Normale kann in zwei entgegengesetzten Richtungen von Punkt P aus positiv gerechnet werden; wir setzen als positive Richtung der Normalen diejenige fest, die sich ergibt, wenn der Wurzel in (21) das positive Vorzeichen gegeben wird.*)

---

*) Diese Richtung ist nicht mit der Gestalt der Fläche als solcher fest verbunden, sondern von der jeweiligen Form der Gleichung abhängig. Schreibt man z. B. die Gleichung einer Kugel in der Form $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, so ist die positive Normale nach außen, dagegen für die Form $a^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ nach dem Mittelpunkt gerichtet.

§ 16. Das Schmiegungsparaboloid.

Die weiteren Betrachtungen, bei denen auch unendlich kleine Größen zweiter Ordnung berücksichtigt werden, knüpfen wir an die Flächengleichung in der Form

$$z = f(x,y), \tag{1}$$

die sich aus $F(x,y,z) = 0$ durch Auflösen nach z ergibt.

Führt man für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von z nach x und y die üblichen Abkürzungen ein, nämlich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \tag{2}$$

so nimmt die Gleichung der Tangentialebene § 15, (19) im Punkt P die Form an

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{3}$$

Die Gleichungen der Normalen werden

$$(X - x) : (Y - y) : (Z - z) = p : q : -1. \tag{4}$$

Ihre Richtungskosinus a, b, c sind bestimmt durch

$$a = wp, \quad b = wq, \quad c = -w, \tag{5}$$

wo

$$w = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{6}$$

Um nun die Fläche in der weiteren Umgebung eines ihrer Punkte P (d. h. mit Berücksichtigung der unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung) zu untersuchen, geben wir dem Koordinatensystem eine spezielle Lage zu diesem Punkt, wodurch sich die zu entwickelnden Gleichungen wesentlich vereinfachen. Die gefundenen Resultate werden sodann später auf die allgemeine Lage des Koordinatensystems übertragen werden. Wir bezeichnen die Koordinaten in diesem System mit ξ, η, ζ und legen zunächst den Ursprung desselben in den Punkt P; dann lautet die Gleichung der Fläche, nach Potenzen von ξ und η entwickelt

$$\zeta = a_1 \xi + b_1 \eta + a_2 \xi^2 + b_2 \xi \eta + c_2 \eta^2 + a_3 \xi^3 + b_3 \xi^2 \eta + c_3 \xi \eta^2 + d_3 \eta^3 + \cdots. \tag{7}$$

Die Koeffizienten a_1, b_1, a_2, b_2 u. s. w. stehen in einfacher Beziehung zu den für $\xi = \eta = 0$ gebildeten partiellen

Ableitungen (2) von ζ nach ξ und η. Bezeichnen wir die Werte desselben mit dem Index 0, so ist

(8) $a_1 = p_0,\ b_1 = q_0,\ 2a_2 = r_0,\ b_2 = s_0,\ 2c_2 = t_0$ u. s. w.

Man kann nun die Koeffizienten a_1 und b_1 gleich Null machen, indem man die ζ-Achse mit der Normalen, die $\xi\eta$-Ebene also mit der Tangentialebene des Punktes P zusammenfallen läßt; dann ist nach (5) $p_0 = a_1 = 0;\ q_0 = b_1 = 0$. Gleichung (7) erhält so die Form

(7a) $$\zeta = a_2\xi^2 + b_2\xi\eta + c_2\eta^2 + \dots.$$

Jetzt kann man noch durch eine passende Drehung des Koordinatensystems um die ζ-Achse den Koeffizienten von $\xi\eta$ zum Verschwinden bringen.*) Man erhält so als einfachste Gleichung der Fläche (mit andern Koeffizienten geschrieben)

(9) $$2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \alpha_3\xi^3 + \beta_3\xi^2\eta + \gamma_3\xi\eta^2 + \delta_3\eta^3 + \dots.$$

Auf diese Form läßt sich also die Flächengleichung stets bringen, abgesehen von singulären Punkten. Sieht man nun ξ und η als unendlich kleine Größen an, so kann die Fläche bei allen Fragen, wo nur unendlich kleine Größen erster Ordnung in Betracht kommen (Tangenten u. s. w.) durch die Fläche $\zeta = 0$, d. h. die Tangentialebene ersetzt werden. In allen Fällen ferner, wo nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt werden müssen (Krümmungen), kann die Fläche vertreten werden durch das Paraboloid

(10) $$2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2},$$

wo sowohl α^2 als β^2 positiv, negativ oder unendlich sein können.

Dieses Paraboloid ist also die zweite Annäherungsfläche. Es heißt das Schmiegungsparaboloid der Fläche im Punkte P, weil es sich der Fläche in P besonders anschmiegt. Seine Eigenschaften werden in den nächsten zwei Paragraphen entwickelt.

Zunächst folgt noch ein Satz über die Tangentialebene, deren Gleichung $\zeta = 0$ ist. Die Schnittkurve derselben mit dem Paraboloid (10) ist eine Kurve der $\xi\eta$-Ebene, nämlich

*) Vgl. S. S. VIII. Simon. Anal. Geom. d. Eb. 3. A. § 36, S. 199.

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\eta^2} = 0. \tag{11}$$

Diese Gleichung stellt ein Linienpaar dar; die beiden Geraden desselben sind

reell, wenn α^2 und β^2 ungleiches Vorzeichen haben,
imaginär, wenn α^2 und β^2 gleiches Vorzeichen haben,
zusammenfallend, wenn α^2 oder β^2 unendlich ist.

Der erste Fall tritt ein, wenn (10) ein hyperbolisches Paraboloid ist, der Punkt P heißt dann ein hyperbolischer (Fig. 9a).

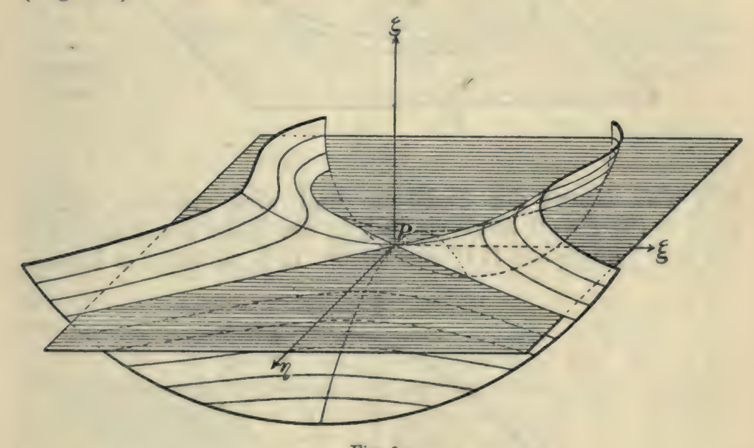


Fig. 9a.

Der zweite, wenn (10) ein elliptisches Paraboloid ist, der Punkt P heißt dann ein elliptischer (Fig. 9b).

Der dritte Fall tritt ein, wenn (10) ein parabolischer Cylinder ist, entweder parallel der η-Achse (wenn $\beta^2 = \infty$), oder parallel der ξ-Achse (wenn $\alpha^2 = \infty$), der Punkt P heißt dann ein parabolischer (Fig. 9c).*)

---

*) Die zweite Annäherungfläche ist genauer in diesem Falle im allgemeinen eine Fläche dritter Ordnung, nämlich

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \delta_3\eta^3, \text{ bezw. } 2\zeta = \frac{\eta^2}{\beta^2} + \alpha_3\xi^3.$$

Die erste dieser Flächen ist in der Figur 9c zur Darstellung gebracht.

Aus der Schnittkurve der Ebene $\zeta = 0$ mit dem Paraboloid (10) schließt man auf die Schnittkurve von $\zeta = 0$ mit der Fläche selbst. Die letztere Schnittkurve ist eben-

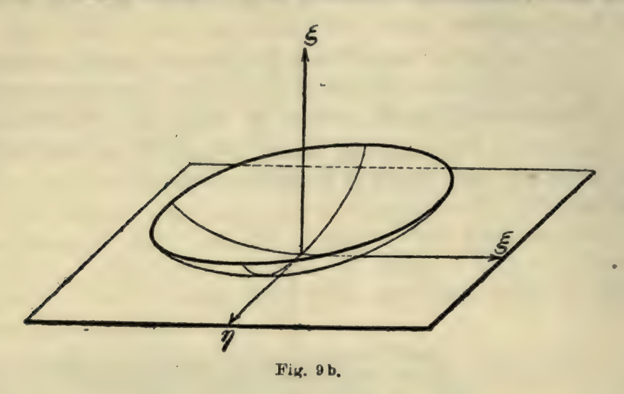


Fig. 9 b.

falls eine Kurve der $\xi\eta$-Ebene und wird erhalten, indem man in (9) $\zeta = 0$ setzt; sie fällt in der Nähe des Punktes P mit dem Linienpaar (11) zusammen, d. h. sie hat das Linien-

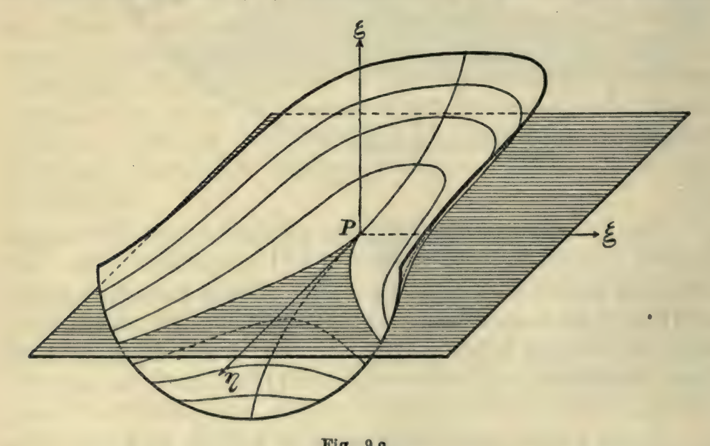


Fig. 9 c.

paar zu Tangenten; mit anderen Worten, sie hat zwei Zweige, die sich in P schneiden. Punkt P ist also ein Doppelpunkt der Kurve (mit reellen Tangenten) oder ein isolierter Punkt (mit imaginären Tangenten) oder ein Rückkehrpunkt

(mit zusammenfallenden Tangenten), je nachdem der erste, zweite oder dritte der genannten Fälle eintritt. Also

Satz. Jede Fläche wird von der Tangentialebene eines Punktes in einer Kurve geschnitten. Diese Kurve hat im Berührungspunkte P einen Doppelpunkt, einen isolierten Punkt oder einen Rückkehrpunkt, je nachdem das Schmiegungsparaboloid in P ein hyperbolisches, elliptisches oder ein parabolischer Zylinder ist.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß jede der beiden Geraden des Linienpaares (11) in P mit der Fläche *drei* konsekutive Punkte gemein hat; die durch diese beiden Geraden definierten Fortschreitungsrichtungen heißen aus einem im nächsten Paragraphen anzugebenden Grund *Asymptotenrichtungen*.

Das Schmiegungsparaboloid spielt für die Krümmung einer Fläche eine ähnliche Rolle, wie der Krümmungskreis in einem Punkt einer ebenen Kurve. Es ist nun bekannt, daß es außer dem Krümmungskreis *zweifach* unendlich viele Kurven zweiter Ordnung gibt, die mit der Kurve drei konsekutive Punkte gemein haben, oder wie man sich ausdrückt, dieselbe „oskulieren“. In der Tat ist ein Kegelschnitt ja erst durch fünf Punkte vollständig bestimmt. Weiter gibt es *einfach* unendlich viele Kegelschnitte, die vier konsekutive Punkte mit der Kurve gemein haben oder dieselbe „hyperoskulieren“ und endlich einen einzigen, der fünf aufeinander folgende Punkte der Kurve enthält.

Für die Flächen entsteht so eine analoge Fragestellung: Gibt es nicht eine Kugel oder überhaupt noch andere Flächen zweiter Ordnung als das Schmiegungsparaboloid, welche die Fläche ebenso innig berühren wie das Schmiegungsparaboloid oder gar noch inniger in Analogie zu den hyperoskulierenden Kegelschnitten einer Kurve?

Zur Beantwortung dieser Fragen legen wir an die Fläche eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung, welche mit ihr in dem betreffenden Punkt, die Tangentialebene gemein hat. Ist der in Betracht gezogene Punkt wie in (9) der Ursprung und die $\xi\eta$-Ebene die Tangentialebene, so lautet die Gleichung der allgemeinsten Fläche zweiter Ordnung, welche die Fläche in Ursprung berührt:

$$(12)\qquad 2\zeta = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\xi\eta + 2E\eta\zeta + 2F\xi\zeta.$$

Wir bestimmen nun die sechs noch willkürlichen Koeffizienten derart, daß, wenn man aus (12) ζ nach aufsteigenden Potenzen von ξ, η entwickelt, die entstehende Reihe mit der Entwicklung (9) bis zu Gliedern möglichst hoher Ordnung in ξ, η übereinstimmt. Einfacher gelangt man zum Ziele, wenn man aus (9) den Wert von 2ζ als Funktion von ξ, η entnimmt, in (12) einsetzt und die sechs Koeffizienten A, B, etc. so bestimmt, daß die Glieder bis zu möglichst hoher Ordnung in ξ, η wegfallen. Sieht man wieder ξ und η als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung an und vernachlässigt man zunächst alle Potenzen von ξ, η von höherem als vom zweiten Grade, so folgt

$$A = \frac{1}{\alpha^2},\ B = \frac{1}{\beta^2},\ D = 0,$$

und man erhält:

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + C\zeta^2 + 2E\eta\zeta + 2F\xi\zeta, \tag{13}$$

wo C, E, F noch völlig willkürlich bleiben.

Dies ist die Gleichung der „oskulierenden" Flächen zweiter Ordnung. Sie berühren die Fläche ebenso innig, wie das Schmiegungsparaboloid: In der Tat geht für $C = E = F = 0$ (13) in (10) über. Man nimmt in der Flächentheorie als Schmiegungsfläche zweiter Ordnung ausschließlich das Paraboloid (10), weil es die einfachste Gleichung besitzt. Wir bemerken, daß sich unter der Flächenschar (13) keine Kugel befindet: Für Flächen gibt es deshalb im allgemeinen*) keine Schmiegungskugel.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter, indem wir auch noch die Glieder dritter Ordnung in ξ, η berücksichtigen: wir erhalten dann die „hyperoskulierenden" Flächen zweiter Ordnung, falls es solche gibt. Setzt man zu diesem Zwecke wieder den Wert von ζ aus (9) in (13) ein so folgt

$$\alpha_3 \xi^3 + \beta_3 \xi^2\eta + \gamma_3 \xi\eta^2 + \delta_3 \eta^3 + \cdots = \left(\frac{C\zeta}{2} + E\eta + F\xi\right) \times$$

*) Nur in speziellen Flächenpunkten, in denen $\alpha^2 = \beta^2$ ist — es sind dies die sog. Kreispunkte, s. S. 90 — gibt es eine oskulierende Kugel: Ihre Gleichung ergibt sich aus (13), wenn man $C = \frac{1}{\alpha^2}$, $E = F = o$ setzt.

$$\times\left(\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\alpha_3\,\xi^3+\beta_3\,\xi^2\eta+\cdots\right),$$

und durch Vergleichung der Koeffizienten der Glieder dritter Ordnung

$$(14) \qquad \alpha_3=\frac{F}{\alpha^2},\ \beta_3=\frac{E}{\alpha^2},\ \gamma_3=\frac{F}{\beta^2},\ \delta_3=\frac{E}{\beta^2}.$$

Aus diesen Gleichungen können die Koeffizienten E und F nur dann ohne Widerspruch bestimmt werden, wenn die Koeffizienten von (9) den Gleichungen

$$(15) \qquad \alpha^2\,\alpha_3=\beta^2\,\gamma_3,\ \alpha^2\,\beta_3=\beta^2\,\delta_3$$

genügen. Da aber die Koeffizienten von (9) im allgemeinen von einander unabhängig sind, so folgt der

Satz 7. In einem Flächenpunkt gibt es im allgemeinen keine hyperoskulierenden Flächen zweiter Ordnung.

Nimmt man die Bedingung (15) als erfüllt an, so erhält man aus (9) und (14) für den betreffenden Flächenpunkt die Entwicklung

$$(16) \quad 2\zeta=\left(\frac{\xi^2}{2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}\right)(1+E\eta+F\xi)+\alpha_4\,\xi^4+\beta_4\,\xi^3\eta+\cdots$$

Die diese Fläche im Ursprung hyperoskulierenden Flächen zweiter Ordnung sind durch Gleichung (13) dargestellt, in der C allein unbestimmt bleibt. Existiert also in einem speziellen Flächenpunkt eine hyperoskulierende Fläche zweiter Ordnung, so gibt es deren unendlich viele. Man kann nun an dem Verhalten der in der Anmerkung dieses Paragraphen (S. 81) erwähnten Asymptotenrichtungen in einfacher Weise erkennen, ob es in einem Flächenpunkt hyperoskulierende Flächen zweiter Ordnung gibt oder nicht. Man schneide die Fläche (16) wie oben mit der Tangentialebene $\zeta=0$; die beiden Geraden des Linienpaars (11) (Asymptotenrichtungen) sind dann die Tangenten der Schnittkurve im Doppelpunkt.

Die Gleichung (16) zeigt, daß jetzt jede der Tangenten nicht bloß drei (wie im allgemeinen Falle) sondern vier Schnittpunkte mit der Schnittkurve gemein hat; jeder Zweig der Kurve hat also im Doppelpunkt einen Wendepunkt und die Kurve verhält sich ähnlich wie die Lemniskate im Doppelpunkt. Man hat somit den

Satz 3. (K. Kommerell) Nur in den Flächenpunkten, in welchen jeder Zweig der durch die

Tangentialebene aus der Fläche ausgeschnittenen Kurve einen Wendepunkt hat, gibt es hyperoskulierende Flächen zweiter Ordnung und zwar unendlich viele*).

§ 17. Indikatrix. Asymptotenrichtungen, Hauptkrümmungsrichtungen, konjugierte Richtungen.

Wir benutzen das Schmiegungsparaboloid, um auf der Fläche $z = f(x, y)$ gewisse charakteristische Richtungen durch einen Flächenpunkt und mit Hilfe derselben gewisse wichtige Kurvensysteme zu definieren.

Die Gleichung der Fläche war, bezogen auf das in § 16 eingeführte Koordinatensystem ξ, η, ζ dargestellt durch § 16, Gl. (9); die Gleichung des zugehörigen Schmiegungsparaboloids für den Koordinatenursprung P war

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2}. \tag{1}$$

Wir schneiden nun das Paraboloid (1) durch eine Ebene parallel der Tangentialebene des Punktes P, also parallel der $\xi\eta$-Ebene im Abstand $\zeta = \varepsilon$, wo ε eine sehr kleine Größe ist. Die so erhaltene Schnittkurve heißt nach Dupin**) die Indikatrix der Fläche in Punkt P, weil sie die wichtigsten Eigenschaften der Fläche in diesem Punkte anzeigt.

Die Indikatrix ist analytisch bestimmt durch (1) in Verbindung mit der Gleichung $\zeta = \varepsilon$. Die Projektion der Indikatrix auf die $\xi\eta$-Ebene***) ist mit der Indikatrix selbst kongruent, und ist ein Kegelschnitt, dessen Gleichung lautet

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 2\varepsilon, \tag{2}$$

oder

$$\frac{\xi^2}{(\alpha\sqrt{2\varepsilon})^2} + \frac{\eta^2}{(\beta\sqrt{2\varepsilon})^2} = 1. \tag{2a}$$

---

*) Dieser Satz gilt natürlich ebenso, wenn die Schnittkurve imaginär ist (elliptische Punkte).

**) Dével de géom., p. 48.

***) S. Fig. 10a—c; die Projektion der Indikatrix ist gestrichelt.

Der Kegelschnitt (2) besitzt nun **erstens** ein Paar Hauptachsen, die in der $\xi\zeta$- und $\eta\zeta$-Ebene liegen, und nach (2a) die Länge $\alpha\sqrt{2\varepsilon}$ und $\beta\sqrt{2\varepsilon}$ haben. Die **Richtungen der Hauptachsen** heißen die **Hauptkrümmungsrichtungen** der Fläche in P (der Name erklärt sich in § 18, S. 88), die durch sie gehenden Normalschnitte die **Hauptschnitte***) der Fläche in P. Da die Richtungen der Hauptachsen des Kegelschnittes (2) stets reell sind, so sind die Hauptkrümmungsrichtungen und die Hauptschnitte einer reellen Fläche stets reell.

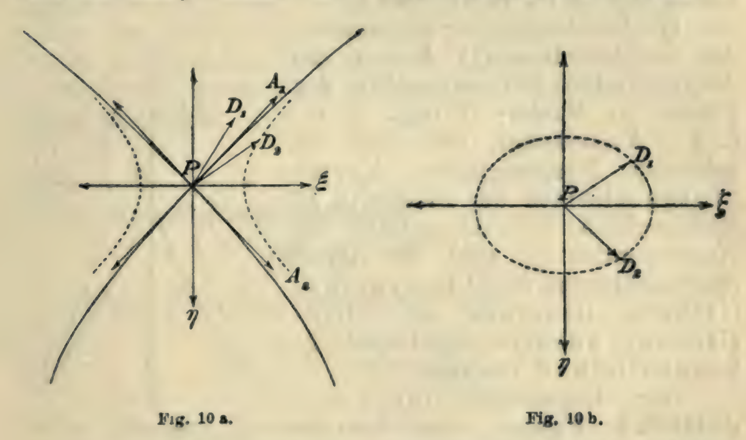


Fig. 10 a. Fig. 10 b.

Der Kegelschnitt ist eine **Hyperbel**, wenn α^2 und β^2 **ungleiches**, eine **Ellipse**, wenn α^2 und β^2 **gleiches** Vorzeichen haben, ein **Parallelenpaar****), wenn α^2 oder β^2 unendlich wird. Im ersten Falle liegt nach § 16, S. 79 ein **hyperbolischer**, im zweiten ein **elliptischer**, im dritten ein **parabolischer** Punkt vor. Es wird sich später ergeben, daß die hyperbolischen und elliptischen Punkte ganze Flächenteile erfüllen, die parabolischen Punkte dagegen im allgemeinen nur eine Kurve, die **parabolische Kurve der Fläche**, welche die Gebiete der hyperbolischen und elliptischen Punkte, oder die elliptisch und hyperbolisch gekrümmten Flächenteile voneinander scheidet (vgl. S. 116).

*) Vgl. Fig. 11; APA', BPB' sind die Hauptschnitte.
**) Richtiger: eine Kurve dritter Ordnung; vgl. Fußnote S. 79.

Der Kegelschnitt besitzt zweitens ein paar Asymptoten, deren Gleichung lautet*)

$$(3) \qquad \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0.$$

Da diese Gleichung mit § 16, (11) identisch ist, so sind die Richtungen der Asymptoten im Punkt P gegeben durch die Tangenten der beiden Zweige, welche die Schnittkurve der Fläche mit ihrer Tangentenebene im Punkt P besitzt (vgl. § 16, S. 81, oben).

Die Richtungen der Asymptoten des Kegelschnittes (2) heißen die Asymptotenrichtungen**) der Fläche im Punkte P (vgl. § 16, S. 81, Anmerkung), die durch sie gehenden Normalschnitte Asymptotenschnitte der Fläche in P. Entsprechend den Asymptoten des Kegelschnittes (2) sind die Asymptotenrichtungen reell in hyperbolischen, imaginär in elliptischen, zusammenfallend in parabolischen Punkten.***)

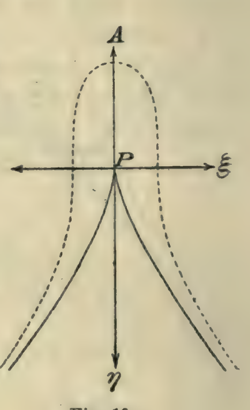


Fig. 10 c.

Der Kegelschnitt (2) besitzt drittens Paare von konjugierten Durchmessern.

Die Richtungen von zwei konjugierten Durchmessern von (2) heißen konjugierte Richtungen†) der Fläche im Punkte P, und die durch sie gehenden Normalschnitte konjugierte Schnitte der Fläche in P. Sind φ_1 und φ_2 die Winkel, welche zwei konjugierte Richtungen mit der ξ-Achse bilden, so ist††)

$$(4) \qquad tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

*) Vgl. S. S. VIII. Simon. Anal. Geom. d. Eb. (3. A.) § 46. S. 245.

**) PA_1 und PA_2 in Fig. 10a.

***) PA in Fig. 10c.

†) PD_1 und PD_2 in Fig. 10a und 10b.

††) S. S. VIII. Simon. a. a. O. § 44. Gl. (6) S. 238.

Die Hauptkrümmungsrichtungen und die Asymptotenrichtungen der Fläche in P stehen in einfachen Beziehungen zu den konjugierten Richtungen, die sich aus bekannten Sätzen über Kegelschnitte*) ergeben, nämlich:

1. Die Hauptkrümmungsrichtungen sind diejenigen zwei konjugierten Richtungen, die aufeinander senkrecht stehen.

2. Die Asymptotenrichtungen sind zwei zusammenfallende konjugierte Richtungen.

3. Jedes Paar von konjugierten Richtungen liegt zu den Asymptotenrichtungen harmonisch. Durch die Indikatrix (bezw. ihre Projektion) werden die von einem Punkte der Fläche ausgehenden Richtungen involutorisch einander zugeordnet; die Asymptotenrichtungen sind die Doppelstrahlen dieser Involution.

§ 18. Hauptkrümmungsradien. Die Sätze von Euler und Meusnier.

Mittels des Schmiegungsparaboloids

$$(1) \qquad 2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2}$$

lassen sich noch gewisse metrische Größen definieren, die für einen Flächenpunkt charakteristisch sind, nämlich die Krümmungsradien der ebenen Schnittkurven, die man erhält, wenn man durch den Flächenpunkt alle möglichen Ebenen legt.

Wir bestimmen zuerst die Krümmungsradien der Normalschnitte, d. h. der ebenen Schnittkurven, deren Ebenen durch die Flächennormale (ζ-Achse) gehen. Zu diesem Zweck drehen wir das Koordinatensystem um die ζ-Achse um den Winkel φ. Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit ξ', η', ζ', so ist**)

$$\xi = \xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi, \quad \eta = \xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi, \quad \zeta = \zeta'.$$

---

*) Vergl. S. S. VIII, Simon, Analytische Geometrie der Ebene. §§ 30 u. 31.

**) Vergl. ebenda. § 10, (7 a). S. 36.

Das Schmiegungsparaboloid erhält dann die Gleichung

$$(2) \qquad 2\zeta' = \frac{(\xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi)^2}{\alpha^2} + \frac{(\xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi)^2}{\beta^2}.$$

Die Ebene $\eta' = 0$ schneidet aus dem Paraboloid die Parabel

$$(3) \qquad 2\zeta' = \xi'^2 \left(\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2} \right)$$

aus.

Ist R der Krümmungsradius dieser Parabel im Scheitelpunkt, so ist*)

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2}.$$

Dadurch ist der Krümmungsradius R eines Normalschnitts, dessen Ebene mit der $\xi\zeta$-Ebene den Winkel φ bildet, gegeben.

Wir bestimmen nun die Werte von φ, für welche R ein Maximum oder Minimum wird, indem wir $\frac{d\frac{1}{R}}{d\varphi} = 0$ setzen. Wir erhalten

$$\frac{d\frac{1}{R}}{d\varphi} = 2\cos\varphi \sin\varphi \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) = 0.$$

Die gesuchten Werte von φ sind also $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (falls nicht $\alpha^2 = \beta^2$ ist, s. weiter unten). Hieraus folgt der

Satz 1. Die Krümmungsradien der Hauptschnitte in einem Punkt P der Fläche stellen den kleinsten bezw. größten unter allen Krümmungsradien der verschiedenen Normalschnitte dar. Man nennt daher diese Radien die Hauptkrümmungsradien) und ihre reziproken Werte die Hauptkrümmungen.**

Bezeichnen wir die Hauptkrümmungsradien mit R_1 und R_2, so folgt aus (4) für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$

---

*) Vergl. S. S. VIII, Simon, Analytische Geometrie der Ebene, § 53, S. 278.

**) PM_1 und PM_2 in Fig. 11.

$$R_1 = \alpha^2, \quad R_2 = \beta^2, \tag{5}$$

und aus (4) und (5) die Gleichung von Euler*)

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{6}$$

Sie drückt den Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnitts durch die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 und den Winkel φ des Normalschnitts gegen einen der Hauptschnitte aus.

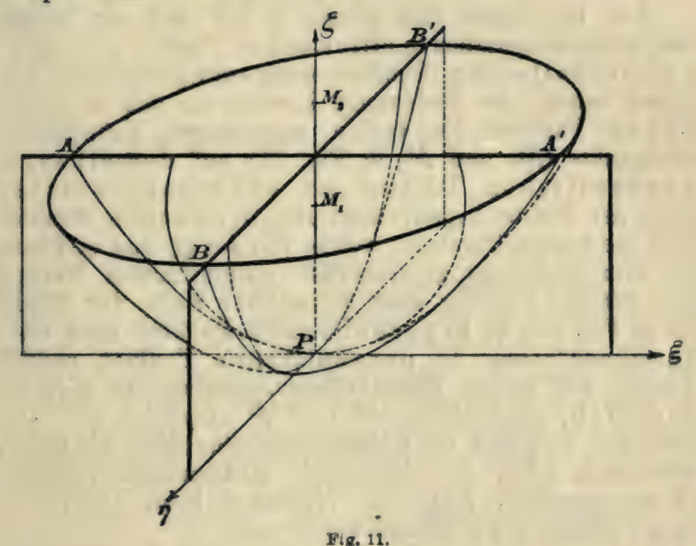


Fig. 11.

Mit Hilfe von (5) erhält die Gleichung des Schmiegungsparaboloids die Form

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2}. \tag{7}$$

Aus (5) folgt, daß die beiden Hauptkrümmungsradien einer Fläche stets reell und im allgemeinen verschieden sind. Es gibt jedoch auf jeder Fläche in der Regel einzelne Punkte, für die $R_1 = R_2$ oder $\alpha^2 = \beta^2$ ist; solche Punkte

*) Recherches sur la courbure des surfaces. Hist. de l'Acad. Berlin. 1760. p. 119—143.

heißen Kreis- oder Nabelpunkte, da für sie die Indikatrix ein Kreis ist. Wir kommen auf ihre Bestimmung noch zurück (§ 22, Aufg. 2). Ein Ellipsoid z. B. hat vier Kreispunkte; es sind die Berührungspunkte der Tangentialebenen parallel den Kreisschnitten. Eine Kugel hat lauter Kreispunkte. Aus der Gleichung (4) folgt, daß $\frac{1}{R}$ für einen Kreispunkt ($\alpha^2 = \beta^2$) unabhängig von φ wird, daß also im Kreispunkt alle Normalschnitte gleiche Krümmung besitzen.

Aus (5) ergibt sich (vergl. § 16), daß die beiden Hauptkrümmungsradien in elliptischen Punkten gleiches-, in hyperbolischen Punkten entgegengesetztes Vorzeichen haben; die Bedeutung hiervon ist, daß in elliptischen Punkten die beiden zugehörigen Krümmungsmittelpunkte (M_1 und M_2 in Fig. 11) auf derselben, in hyperbolischen Punkten auf entgegengesetzten Seiten der Fläche liegen; denn in elliptischen Punkten liegen die beiden Parabeln, welche von der $\xi\zeta$- und $\eta\zeta$-Ebene aus dem Schmiegungsparaboloid ausgeschnitten werden, beide mit der Öffnung nach derselben Seite der Fläche (wie in Fig. 11), in hyperbolischen Punkten nach entgegengesetzten. In parabolischen Punkten endlich ist einer der beiden Hauptkrümmungsradien, R_1 oder R_2, unendlich, je nachdem α^2 oder β^2 unendlich ist. Wir setzen nun fest, daß ein Krümmungsradius dann als positiv gelten soll, wenn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der positiven Seite der Normalen liegt, andernfalls negativ (vergl. § 15, Schlußanmerkung).

Statt der Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ benutzt man häufig ihre einfachsten symmetrischen Funktionen, nämlich

$$(8) \qquad h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad k = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Der Wert h heißt die mittlere Krümmung, k das Krümmungsmaß der Fläche im Punkte P. Inwiefern das Produkt k der Hauptkrümmungen als Maß für die Krümmung der Fläche in dem betreffenden Punkt bezeichnet werden darf, wird sich weiter unten (§ 22) zeigen. Beide Werte, h und k, spielen eine wichtige Rolle in der Flächentheorie, h ist zugleich in der mathematischen Physik

(besonders Kapillarität) von Bedeutung. — Nach dem Früheren ist das Krümmungsmaß k positiv in elliptischen, negativ in hyperbolischen, Null in parabolischen Punkten der Fläche.

Wir suchen noch die Normalschnitte, welche unendlich große Krümmungshalbmesser haben. Setzen wir $R = \infty$, so folgt aus (4) für den Winkel φ die Gleichung

$$\frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2} = 0,$$

oder

$$\operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}. \tag{9}$$

Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta}{\xi}$ ist, so folgt aus (9)

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0,$$

d. h. es gibt zwei Richtungen, für die der Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnitts unendlich wird. Dieselben sind nur reell, wenn α^2 und β^2 ungleiches Vorzeichen haben, und fallen, wie aus § 17, (3) folgt, mit den beiden Asymptotenrichtungen zusammen. Wir haben also den

Satz 2. Die Normalschnitte, welche durch die Asymptotenrichtungen gehen, haben unendlich große Krümmungsradien, mithin Wendepunkte in dem betreffenden Punkt.

Endlich suchen wir den Krümmungsradius der Schnittkurve einer beliebigen schiefen Schnittebene durch den Flächenpunkt.

Die Gleichung des Schmiegungsparaboloids in den Koordinaten ξ', η', ζ' war nach (2) von der Form

$$2\zeta' = A\xi'^2 + B\xi'\eta' + C\eta'^2, \tag{10}$$

wo z. B.

$$A = \frac{\cos^2\varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2} \tag{11}$$

ist.

Die Schnittebene gehe durch die ξ'-Achse und bilde mit der $\xi'\zeta'$-Ebene den Winkel H. Wir beziehen nun die Gleichung des Schmiegungsparaboloids auf ein neues

Koordinatensystem ξ'', η'', ζ'', das mit dem alten (ξ', η', ζ') den Ursprung und die ξ'-Achse gemeinsam hat, während die η''- und ζ''-Achse mit der η'- und ζ'-Achse je den Winkel H bildet (vergl. Fig. 12), so daß also die Schnittebene die $\xi''\zeta''$-Ebene ist. Die Transformationsformeln sind:

$$\xi' = \xi''; \quad \eta' = \eta'' \cos H - \zeta' \sin H; \tag{12}$$
$$\zeta' = \eta'' \sin H + \zeta'' \cos H.$$

Trägt man diese Werte in (10) ein, so erhält man die Gleichung des Schmiegungsparaboloids in den neuen Koordinaten ξ'', η'', ζ''. Um die Schnittkurve mit der schiefen Schnittebene, d. h. mit der $\xi''\zeta''$-Ebene zu finden, hat man $\eta'' = 0$ zu setzen. Als Gleichung der gesuchten Schnittkurve ergibt sich

$$2\zeta'' \cos H = A\xi''^2 - B\xi''\zeta'' \sin H + C\zeta''^2 \sin^2 H. \tag{13}$$

Die Kurve ist von der zweiten Ordnung. Ihr Krümmungsradius*) im Punkte $\xi'' = 0$, $\zeta'' = 0$ ist

$$r = \frac{\cos H}{A},$$

oder, wenn man den Wert von A aus (11) einsetzt,

$$r = \frac{\cos H}{\frac{\cos^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\beta^2}}. \tag{14}$$

Diese Formel gibt den Krümmungsradius eines beliebigen ebenen Schnittes der Fläche. Dabei bedeutet φ den Winkel, den die Schnittgerade der Schnittebene und der Tangentialebene mit einer der Hauptkrümmungsrichtungen ($\eta = 0$) bildet, H den Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Flächennormale (vgl. Fig. 12).

Setzt man in (14) $H = 0$, so erhält man nach (4) den Krümmungsradius R des Normalschnittes, dessen Ebene durch dieselbe Flächentangente geht, wie die Ebene des schiefen Schnittes. Aus (14) folgt nun

$$r = R \cdot \cos H. \tag{15}$$

---

*) Vergl. S. S. XI. W. Fr. **Meyer**, Integralrechnung, § 18.

Diese Gleichung enthält den

Satz 3 (von Meusnier*). Der Krümmungsradius r eines schiefen Schnittes ist gleich der Projektion des Krümmungsradius des durch dieselbe Flächentangente gehenden Normalschnittes auf die Ebene des schiefen Schnittes.

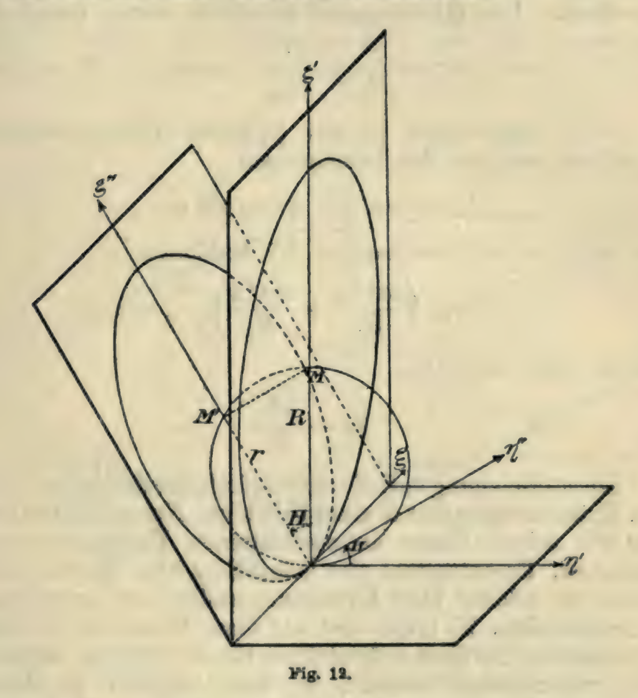


Fig. 12.

Oder

Die Krümmungsmittelpunkte aller ebenen Schnittkurven durch dieselbe Flächentangente liegen auf einem Kreis (MM' in Fig. 12), der über dem Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnitts als Durchmesser in einer zur Ebene des Normalschnitts senkrechten Ebene beschrieben ist.

*) Mémoire sur les courbures des surfaces. Mém. div. Sav. 1785. T. X. p. 477—510.

Aus (15) folgt weiter:

Zusatz. Unter allen ebenen Schnitten durch dieselbe Flächentangente hat der Normalschnitt den größten Krümmungsradius.

In übersichtlicher Weise lassen sich die Krümmungsverhältnisse der Normalschnitte mit Hilfe der Indikatrix darstellen. Die Gleichungen derselben waren (vergl. (7))

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2}, \quad \zeta = \varepsilon.$$

Wir führen nun in der $\xi\eta$-Ebene Polarkoordinaten (ρ, φ) ein vermöge der Gleichungen

$$\xi = \rho \cos\varphi, \quad \eta = \rho \sin\varphi,$$

und erhalten als Gleichungen der Indikatrix

$$2\zeta = \rho^2 \left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right), \quad \zeta = \varepsilon.$$

Daraus folgt nach (6)

$$2\varepsilon = \frac{\rho^2}{R}. \tag{16}$$

Diese Gleichung enthält eine einfache Beziehung zwischen dem Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnitts und dem von seiner Ebene ausgeschnittenen Halbmesser ρ der Indikatrix. Es entspricht also jedem Satz über Kegelschnittsradien ein solcher über Krümmungsradien der zugehörigen Normalschnitte. Es lassen sich auf diese Weise die in diesem Paragraphen hierüber aufgestellten Sätze ebenfalls herleiten, sowie verschiedene weitere, in den Aufgaben zu diesem Abschnitt (No. 6 und 7) enthaltenen Sätze.

§ 19. Geometrische Betrachtungen und Definitionen.

Unsere bisherigen Untersuchungen der Krümmungsverhältnisse in einem Flächenpunkt P und ihre Ergebnisse stützten sich auf die spezielle Lage des Koordinatensystems zum Punkt P. Um nun die entsprechenden Formeln für die allgemeine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ und für einen beliebigen Flächenpunkt zu erhalten, ist es erforderlich, die

konjugierten Richtungen, und damit die Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen ohne Benutzung der Indikatrix zu definieren.

Es sei (s. Fig. 13) $ABCD$ die Indikatrix mit den Gleichungen $2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2}$, $\zeta = \varepsilon$, A' und B' die Projektionen von A und B auf die Tangentialebene des Punktes P. In § 17 waren die Richtungen PA' und PB' zweier konjugierten Durchmesser der projizierten Indikatrix als kon-

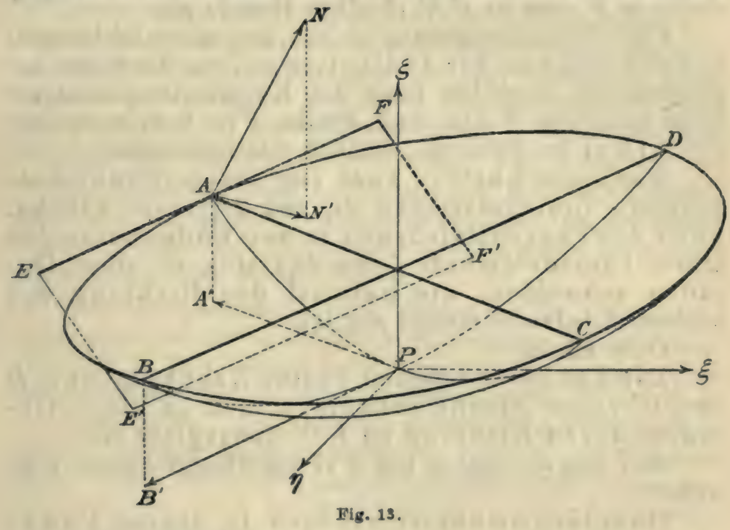


Fig. 13.

jugierte Richtungen, und die zugehörigen Normalschnitte APC, BPD als konjugierte Schnitte bezeichnet. Die Ebenen dieser beiden Schnittkurven schneiden aus der Ebene der Indikatrix die konjugierten Durchmesser AC und BD, und aus der Fläche die Linienelemente PA und PB aus, welche bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung mit PA' und PB' zusammenfallen. Denn da $AA' = BB' = \varepsilon$ und $2\varepsilon = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2}$ ist, so ist ε, und damit auch AA' und BB' von zweiter Ordnung unendlich klein, wenn ξ und η von erster Ordnung unendlich klein sind. Wir konstruieren nun im Endpunkt A des Linienelements PA die Tangential-

ebene an die Fläche, d. h. an das Schmiegungsparaboloid, welches ja die Fläche in der Umgebung von P ersetzt. Diese Tangentialebene geht jedenfalls durch die Tangente EF der Indikatrix im Punkte A; EF ist aber parallel BD. Die Tangentialebene ist also parallel BD und PB', und ebenso ist ihre Schnittgerade $E'F'$ mit der Tangentialebene des Punktes P parallel zu PB', d. h. mit der zu PA', bezw. PA konjugierten Richtung. Ebenso zeigt man, daß der Schnitt der Tangentialebene in B und der Tangentialebene in P eine zu PA' parallele Gerade gibt.

Diese Betrachtung ermöglicht nun, konjugierte Richtungen unabhängig von der Indikatrix und von der bisher angenommenen speziellen Lage des Koordinatensystems für jeden beliebigen Punkt einer Fläche $F(x, y, z) = 0$, oder $z = f(x, y)$ zu definieren, nämlich folgendermaßen:

Konjugiert heißen zwei von einem Punkt ausgehende Linienelemente ds_1 und ds_2 einer Fläche, wenn die Tangentialebenen in den Endpunkten des einen Linienelements (etwa ds_1) sich in einer Geraden schneiden, die parallel der Richtung des andern Linienelements ds_2 ist.

Oder kürzer

Die Tangentialebenen zweier Nachbarpunkte P und P' einer Fläche schneiden sich in einer Geraden, deren Richtung zu PP' konjugiert ist.

Aus den am Schluß von § 17 angeführten Sätzen folgt weiter:

Hauptkrümmungsrichtungen in einem Punkt einer Fläche sind diejenigen zwei Richtungen, die zugleich konjugiert und orthogonal sind.

Asymptotenrichtungen in einem Punkt einer Fläche sind diejenigen zwei Richtungen, in welchen jedesmal zwei konjugierte Richtungen zusammen fallen.

Damit sind nun auch die Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen unabhängig von der Indikatrix und für jede beliebige Lage des Koordinatensystems definiert. Die so charakterisierten, von einem beliebigen Flächenpunkt ausgehenden Richtungen dienen nun weiter zur Definition gewisser Kurvensysteme auf der Fläche.

Denkt man sich in allen Punkten einer Fläche die zwei Hauptkrümmungsrichtungen durch Bogenelemente auf der Fläche bestimmt, und diese Bogenelemente zu Kurven aneinandergeschlossen, so erhält man auf der Fläche zwei Kurvensysteme, die sich überall rechtwinklig durchschneiden. Diese Kurvensysteme heißen die Krümmungslinien der Fläche. Durch jeden Punkt P der Fläche gehen zwei Krümmungslinien, deren Tangenten die Hauptkrümmungsrichtungen in P angeben.

Infinitesimal kann man eine einzelne Krümmungslinie so konstruieren, daß man von einem Flächenpunkt P in einer der Hauptkrümmungsrichtungen um eine unendlich kleine Strecke ds weitergeht zu einem Nachbarpunkt P_1, von diesem ebenso in der entsprechenden Hauptkrümmungsrichtung nach P_2, von hier ebenso weiter nach P_3 etc.

In derselben Weise bestimmen die in allen Flächenpunkten konstruierten Asymptotenrichtungen zwei Kurvensysteme, welche die Asymptotenlinien (auch Haupttangentenkurven) der Fläche heißen.

Die Asymptotenlinien sind, ebenso wie die Asymptotenrichtungen, nur auf hyperbolisch gekrümmten Flächenteilen reell (vgl. S. 86.) Durch jeden hyperbolischen Punkt gehen zwei Asymptotenlinien, deren Tangenten in die Asymptotenrichtungen fallen. Auf elliptisch gekrümmten Flächenteilen sind die Asymptotenlinien imaginär, auf der parabolischen Kurve fallen die beiden Asymptotenrichtungen zusammen, und zwar, wie aus § 17 ersichtlich ist, in eine der Hauptkrümmungsrichtungen.

Von den Krümmungslinien können wir noch eine wichtige Eigenschaft nachweisen, die sich an die Bestimmung der Krümmungsradien der Normalschnitte anschließt. Der Krümmungsradius r einer ebenen Kurve in einem Punkt P wird bekanntlich konstruiert, indem man die Normale des Punktes P mit der Normalen des nächstfolgenden Punktes P' zum Schnitt bringt. Der Schnittpunkt ist der Krümmungsmittelpunkt, sein Abstand von P der Krümmungsradius. Wendet man dies auf einen beliebigen Normalschnitt einer Fläche in einem Punkt P an, so hat man die Normale der Schnittkurve in P mit der Normalen im nächstfolgenden Punkt zu schneiden. Nun ist die Normale der Schnitt-

kurve in P zugleich die Normale der Fläche in P, dagegen ist die Normale der Schnittkurve in P' nicht zugleich die Normale der Fläche in P'. Um dies zu beweisen, konstruieren wir (s. Fig. 13) in dem zu P unendlich benachbarten Flächenpunkt A die Normale AN der Fläche (bezw. des Schmiegungsparaboloids) und zeigen, daß diese die Normale des Punktes P, d. h. die ζ-Achse im allgemeinen nicht schneidet (was doch der Fall sein müßte, wenn AN zugleich die Normale der ebenen Schnittkurve APC wäre), sondern nur, wenn A einer der Scheitel der Indikatrix ist. Die Flächennormale in A liegt in der Ebene, die senkrecht zu der Indikatrixtangente EF durch A gelegt wird; diese Ebene ist parallel der ζ-Achse und enthält auch die Normale AN' der Indikatrix in A. Letztere geht aber nicht durch den Mittelpunkt der Indikatrix, außer wenn A einer der Scheitel ist, also geht auch die Ebene NAN' nicht durch die ζ-Achse.

Da nun die Flächennormale des Punktes A in der Ebene NAN' liegt, kann sie im allgemeinen die ζ-Achse nicht schneiden. Nur wenn A einer der Scheitel der Indikatrix ist (also in eine der Hauptkrümmungsrichtungen fällt, vgl. S. 85), geht die Normale der Indikatrix in A durch deren Mittelpunkt, und die Ebene NAN' durch die ζ-Achse. In diesem Fall also — und nur in diesem Fall — trifft auch die in A errichtete Flächennormale die ζ-Achse. Wir haben also den

Satz 1. Die Normale eines Flächenpunktes P wird nur von denjenigen Nachbarnormalen geschnitten, deren Fußpunkte in den Hauptkrümmungsrichtungen liegen.

Zusatz 1. Die Richtung PP' auf der Fläche ist dann und nur dann eine Hauptkrümmungsrichtung, wenn die Flächennormalen in P und P' sich schneiden (oder auch parallel sind).

Zusatz 2. Die Krümmungslinien einer Fläche sind diejenigen Kurven, längs deren die konsekutiven Flächennormalen sich schneiden.

Oder:

Die längs einer Krümmungslinie errichteten Flächennormalen bilden eine abwickelbare Fläche und umgekehrt.

1. Beispiel. Auf einer Rotationsfläche bilden die Meridiane das eine, die Parallelkreise das andere System von Krümmungslinien; die zugehörigen abwickelbaren Flächen sind einerseits die Meridianebenen, andererseits die Kegel, welche von den längs eines Parallelkreises errichteten Flächennormalen gebildet werden.

2. Beispiel. Auf einer Kugel oder Ebene ist jede Kurve Krümmungslinie; denn die sämtlichen Flächennormalen der Kugel (Radien) schneiden sich im Mittelpunkt, die der Ebene sind parallel. Bei der Kugel sind also die zugehörigen abwickelbaren Flächen Kegel mit der Spitze im Mittelpunkt, bei der Ebene Zylinder, deren Mantellinien auf ihr senkrecht stehen; die Leitlinie ist beidemal die betr. Kurve.

Aus Zusatz 2 folgt in Verbindung mit § 12, Satz 2, der

Satz 2. (von Bonnet*).) Ist die Schnittkurve zweier Flächen für jede von beiden eine Krümmungslinie, so ist längs derselben der Winkel beider Flächen konstant.

Umgekehrt:

Schneiden sich zwei Flächen allenthalben unter konstantem Winkel, und ist ihre Schnittkurve Krümmungslinie für die eine Fläche, so ist sie es auch für die andere.

Beweis: Die Flächennormalen bilden (nach Zus. 2) für jede der beiden Flächen längs der Schnittkurve je eine abwickelbare Fläche. Da sie aber auch Normalen der Schnittkurven sind, so sind die Rückkehrkanten dieser beiden abwickelbaren Flächen (nach § 12, Satz 2) Evoluten der Schnittkurven. Nach § 12, Satz 2, Zus. bilden mithin die beiden in einem Punkt der Schnittkurven errichteten Normalen der zwei Flächen überall denselben Winkel, also gilt dasselbe auch von den Tangentialebenen der beiden Flächen.

Da (siehe oben das 2. Beispiel) auf einer Ebene oder Kugel jede Kurve Krümmungslinie ist, so folgt als spezieller Fall des vorigen Satzes der

---

*) Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphèriques. Journ. èc. polyt. cah. 35. (1853) p. 119.

Satz 3. (von Joachimsthal*).) Ist eine Krümmungslinie eben oder sphärisch, so schneidet ihre Ebene oder Kugel die Fläche überall unter konstantem Winkel.

Umgekehrt:

Schneidet eine Ebene oder Kugel eine Fläche überall unter konstantem Winkel, so ist die Schnittkurve eine Krümmungslinie der Fläche.

Beispiel. In § 12, Schluß wurde bemerkt, daß bei einer Gesimsfläche die Ebene einer Profilkurve die Fläche allenthalben senkrecht schneidet. Folglich wird auf einer solchen Fläche die eine Schar der Krümmungslinien von den Profilkurven gebildet. Die andere Schar sind ihre Orthogonaltrajektorien, die Parallelkurven.

§ 20. Sphärische Abbildung einer Fläche; Formeln für die Richtungskosinus der Normalen.

Auf Grund der geometrischen Definitionen des § 19 lassen sich die Bedingungsgleichungen der konjugierten Richtungen, der Krümmungslinien und Asymptotenlinien sowie die Werte der Hauptkrümmungsradien für die allgemeine Flächenform $F(x, y, z) = 0$ leicht entwickeln. In diesen Entwickelungen sind, wie sich zeigen wird, die in § 15, Gl. (22) aufgestellten Richtungskosinus der Flächennormalen

$$a = VF_1, \quad b = VF_2, \quad c = VF_3 \tag{1}$$

von besonderer Wichtigkeit. Wir schicken daher in diesem Paragraphen einige geometrische Betrachtungen, sowie verschiedene später zu benutzende Formeln für diese Größen voraus.

In § 3 wurde gezeigt, wie man das sphärische Bild einer Raumkurve mit Hilfe ihrer Tangenten konstruiert. In analoger Weise läßt sich das sphärische Bild eines beliebigen Flächenpunktes $P(x, y, z)$ herstellen, indem man zu der positiven Richtung seiner Normalen die Parallele durch den Ursprung des Koordinatensystems zieht und

*) Journ. f. Mathematik. Bd. 30. (1846.) p. 347.

diese mit der Einheitskugel zum Schnitt bringt. Der Schnittpunkt heißt das sphärische Bild des Punktes P, und hat die Koordinaten a, b, c. Man kann auf diese Weise beliebige Punkte und Kurven der Fläche auf die Einheitskugel abbilden und erhält so die sphärische Abbildung der Fläche. Der analytische Ausdruck dieser Abbildungen sind die Gleichungen (1), welche a, b, c, d. h. die Koordinaten des sphärischen Bildes, in Funktion der Koordinaten x, y, z des Flächenpunktes darstellen, so daß zu jedem Koordinatentripel x, y, z ein entsprechendes a, b, c gehört. Man bezeichnet auch a, b, c kurz als die sphärischen Koordinaten des Flächenpunktes $P(x, y, z)$. Die Koordinaten x, y, z legen den Flächenpunkt fest, a, b, c die Richtung seiner Normalen.

Es zeigt sich nun im folgenden, daß sich alle für die Untersuchung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ wichtigen Größen und Gleichungen besonders einfach darstellen, wenn man nur die Koordinaten x, y, z des Flächenpunktes und deren Differentiale und die zugehörigen sphärischen Koordinaten a, b, c und deren Differentiale benutzt.

Wir geben daher zuerst einige später oft zu benutzenden Formeln für diese Größen.

Die Richtungskosinus a, b, c sind durch die identische Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{2}$$

verbunden.

Aus (1) und § 15, (4) folgt für die Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$ auf der Fläche die Bedingung

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \tag{3}$$

oder, mit Benutzung des in § 15 eingeführten Summenzeichens Σ, abgekürzt

$$\Sigma a\,dx = 0. \tag{3a}$$

Durch Bildung des totalen Differentials folgt aus (3)

$$da\,dx + db\,dy + dc\,dz + a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0, \tag{4}$$

oder kurz

$$\Sigma\,da\,dx + \Sigma\,a\,d^2x = 0. \tag{4a}$$

Hierbei ist

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
da &= \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz, \\
db &= \frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz, \\
dc &= \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy + \frac{\partial c}{\partial z} dz.
\end{aligned}
$$

Durch Einführung der Werte aus (5) stellt sich das erste Glied $\Sigma\, da dx$ in (4a) als homogener Differentialausdruck zweiten Grades in dx, dy, dz dar.

Weitere Formeln lassen sich aus der Identität (2) ableiten. Durch totale Differentiation folgt

$$
(6) \qquad a da + b db + c dc = 0 \text{ oder } \Sigma a da = 0.
$$

Durch Bildung des totalen Differentials folgt aus (6)

$$
(7) \qquad \Sigma da^2 + \Sigma a d^2 a = 0.
$$

Bezeichnet man alle auf die Kugel bezüglichen Größen durch den Index 0, ihr Linienelement also mit ds_0, so ist

$$
(8) \qquad ds_0^2 = \Sigma da^2 = - \Sigma a d^2 a,
$$

und es stellt offenbar ds_0 das sphärische Bild des Bogenelements ds, oder kurz das sphärische Bogenelement der Fläche dar [vgl. § 15, (7)]. Aus (8) folgt weiter

$$
(9) \qquad ds_0\, d^2 s_0 = \Sigma da d^2 a.
$$

Differenziert man (2) partiell nach x, y, z, so erhält man

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
a \frac{\partial a}{\partial x} + b \frac{\partial b}{\partial x} + c \frac{\partial c}{\partial x} &= 0, \\
a \frac{\partial a}{\partial y} + b \frac{\partial b}{\partial y} + c \frac{\partial c}{\partial y} &= 0, \\
a \frac{\partial a}{\partial z} + b \frac{\partial b}{\partial z} + c \frac{\partial c}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}
$$

Da a, b, c nie alle drei verschwinden können, so folgt aus (10) für die partiellen Ableitungen von a, b, c nach x, y, z die identisch erfüllte Gleichung

(11)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial b}{\partial z} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 .$$

Es erscheint für spätere Verwendung schon hier zweckmäßig, für gewisse häufig wiederkehrende Differentialformen Abkürzungen einzuführen. Solche haben wir schon in § 15, (7) durch ds^2 und oben in (8) durch ds_0^2 eingeführt. Wir setzen ferner abkürzend (vgl. 4 a)

(12)
$$L = \Sigma a d^2 x = - d a d x ,$$

und ferner

(13)
$$M = \begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} .$$

Die vier Formen ds^2, ds_0^2, L, M sind sämtlich homogene Differentialausdrücke zweiten Grades in dx, dy, dz. Sie sind nicht unabhängig voneinander, sondern durch eine Gleichung verbunden. Durch Quadrieren von (13) ergibt sich nämlich

$$M^2 = \begin{vmatrix} \Sigma a^2 & \Sigma a da & \Sigma a dx \\ \Sigma a da & \Sigma da^2 & \Sigma da dx \\ \Sigma a dx & \Sigma da dx & \Sigma dx^2 \end{vmatrix} .$$

Es ist aber
nach (2) $\Sigma a^2 = 1$, nach (6) $\Sigma a da = 0$, nach (3) $\Sigma a dx = 0$, nach (8) $\Sigma da^2 = ds_0^2$, nach (12) $\Sigma da dx = - L$, nach § 15, (7) $\Sigma dx^2 = ds^2$, also folgt:

(14)
$$M^2 = ds^2\, ds_0^2 - L^2 .$$

Die vier Formen ds^2, ds_0^2, L, M beherrschen in Verbindung mit einem später (§ 25) zu definierenden Differentialausdruck N die ganze Theorie der Flächenkurven, wie sich in § 27 zeigen wird.

§ 21. Allgemeine Formeln für konjugierte Richtungen, Krümmungslinien und Asymptotenlinien.

Wir kommen nun zur Aufstellung der Gleichungen für die konjugierten Richtungen, die Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen für die allgemeine Flächenform $F(x, y, z) = 0$, wozu wir, wie schon in § 19 angedeutet, die dort entwickelten, von der Indikatrix unabhängigen Definitionen benutzen.

1. Konjugierte Richtungen.

Es sei P ein Punkt der Fläche mit den Koordinaten x, y, z; P_1 und P_2 zwei ihm unendlich benachbarte Punkte mit den Koordinaten $x + dx_1$, $y + dy_1$, $z + dz_1$, bezw. $x + dx_2$, $y + dy_2$, $z + dz_2$. Die zugehörigen Bogenelemente $PP_1 = ds_1$ und $PP_2 = ds_2$ sind dann bestimmt durch die Gleichungen

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2, \quad ds_2^2 = dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2.$$

Aus der in § 19 aufgestellten Definition eines Paares von konjugierten Richtungen folgt nun, daß die Richtungen PP_1 und PP_2 konjugiert sind, wenn die Tangentialebene in P von der Tangentialebene in P_1 in einer Geraden geschnitten wird, die der Richtung PP_2 parallel läuft.

Die analytische Bedingung hierfür ergibt sich folgendermaßen. Die Gleichung der Tangentialebene in P ist in X, Y, Z als laufenden Koordinaten nach § 15, (19) und (22),

$$(X - x)\,a + (Y - y)\,b + (Z - z)\,c = 0, \tag{1}$$

und ebenso die der Tangentialebene in P_1

$$\begin{aligned}(X - x - dx_1)(a + da_1) + (Y - y - dy_1)(b + db_1)\\ + (Z - z - dz_1)(c + dc_1) = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

wo da_1, db_1, dc_1, nach § 20, (5) für dx_1, dy_1, dz_1 statt dx, dy, dz zu bilden sind. Die Gleichungen (1) und (2) stellen die Schnittgerade der Tangentialebenen in P und P_1 dar; (2) kann unter Berücksichtigung von (1) und von § 20, (3), sowie unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung ersetzt werden durch

$$(X - x)\,da_1 + (Y - y)\,db_1 + (Z - z)\,dc_1 = 0. \tag{2a}$$

Die Schnittgerade der Tangentialebene in P mit der in P_1

ist nun dargestellt durch die Gleichungen (1) und (2a); soll sie parallel der Richtung PP_2 sein, so muß

(3) $$(X - x):(Y - z):(Z - z) = dx_2 : dy_2 : dz_2$$

sein. Aus (2a) und (3) folgt nun die gesuchte Bedingungsgleichung

(4) $$da_1\, dx_2 + db_1\, dy_2 + dc_1\, dz_2 = 0\,.$$

Da die Beziehungen zwischen den konjugierten Richtungen reziprok sind, so kann man (4) auch ersetzen durch

(4a) $$da_2\, dx_1 + db_2\, dy_1 + dc_2\, dz_1 = 0.$$

Analytisch zeigt sich die Übereinstimmung von (4) und (4a) sofort, wenn man für da, db, dc die Werte aus § 20 (5) einsetzt (vgl. auch unten Gl. 17). Es ergibt sich also

Satz 1. Konjugiert sind zwei von P aus gehende Richtungen PP_1 und PP_2, oder zwei Linienelemente ds_1 und ds_2 auf der Fläche, wenn die Gleichung (4) oder (4a) besteht.

Aus (4) bezw. (4a) folgt der

Zusatz. Zwei Linienelemente ds_1 und ds_2 sind konjugiert, wenn das eine auf dem sphärischen Bild des anderen senkrecht steht.

2. Die Hauptkrümmungsrichtungen

waren in § 19 definiert als diejenigen zwei Richtungen, die zugleich konjugiert und orthogonal sind.

Sind wieder PP_1 und PP_2, bezw. ds_1 und ds_2, zwei von P aus gehende Richtungen, so ist nach (4) die Bedingung dafür, daß sie konjugiert sind

(5) $$da_1\, dx_2 + db_1\, dy_2 + dc_1\, dz_2 = 0$$

und die Bedingung der Orthogonalität nach § 15, (17)

(6) $$dx_1\, dx_2 + dy_1\, dy_2 + dz_1\, dz_2 = 0\,.$$

Dazu kommt nach § 20, (3) die Gleichung

(7) $$a\, dx_2 + b\, dy_2 + c\, dz_2 = 0.$$

Eliminiert man aus (5), (6) und (7) dx_2, dy_2, dz_2, so erhält man die Bedingung dafür, daß PP_1 eine Hauptkrümmungsrichtung ist, nämlich

$$\begin{vmatrix} a & da_1 & dx_1 \\ b & db_1 & dy_1 \\ c & dc_1 & dz_1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Vertauscht man den Index 1 mit 2, so erhält man die Bedingung dafür, daß PP_2 eine Hauptkrümmungsrichtung ist. Wir haben also den

Satz 2. Die zwei Hauptkrümmungsrichtungen in einem Punkt $P(x, y, z)$ einer Fläche sind bestimmt durch die Gleichung

$$(8) \qquad M = \begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man für da, db, dc die Werte aus § 20, (5) ein, so geht M, wie schon in § 20 bemerkt, in einen homogenen Differentialausdruck zweiten Grades in dx, dy, dz, und gibt in Verbindung mit § 20, (3) die Verhältnisse $dx : dy : dz$, welche den Hauptkrümmungsrichtungen zukommen.

3. Asymptotenrichtungen.

Eine Asymptotenrichtung war in § 19 definiert als Richtung, die mit ihrer konjugierten zusammenfällt. Soll also PP_1 eine Asymptotenrichtung sein, so muß die konjugierte Richtung PP_2 mit PP_1, oder der Punkt P_2 mit P_1 zusammenfallen. Die Bedingung dafür ist nach (4)

$$(9) \qquad da_1\, dx_1 + db_1\, dy_1 + dc_1\, dz_1 = 0\,.$$

Für die Richtung PP_2 gilt die entsprechende Bedingung mit dem Index 2. Also folgt der

Satz 3. Die zwei Asymptotenrichtungen in einem Punkt $P(x, y, z)$ einer Fläche sind bestimmt durch die Gleichung

$$(10) \qquad -L = da\, dx + db\, dy + dc\, dz = 0\,.$$

Auch hier erhält man durch Einsetzen der Werte aus § 20, (5) einen homogenen Differentialausdruck zweiten Grades in dx, dy, dz, vgl. § 20, (12), der in Verbindung mit § 20, (3) die Verhältnisse $dx : dy : dz$ für die beiden Asymptotenrichtungen liefert.

Die vorstehenden Entwicklungen geben zugleich die Differentialgleichungen der Krümmungsslinien und Asymptotenlinien einer Fläche $F(x, y, z) = 0$.

Nach der in § 9 (S. 97) gegebenen Definition sind die Krümmungslinien die beiden, von den Hauptkrüm-

mungsrichtungen aller Punkte der Fläche gebildeten Kurvensysteme.

Wir haben also nur die beiden Kurvensysteme zu bestimmen, die in allen Punkten der Fläche $F(x, y, z) = 0$ den beiden Bedingungen

$$(11) \quad M = \begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} = 0, \; a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

genügen. Daher

Satz 4. Die Gleichungen (11) stellen in Verbindung mit $F = 0$ die Differentialgleichungen der Krümmungslinien der Fläche dar.

Aus § 19 entnehmen wir ferner:

Asymptotenlinien heißen die beiden von den Asymptotenrichtungen aller Punkte der Fläche gebildeten Kurvensysteme auf der Fläche.

Man hat also analog wie oben die beiden Kurvensysteme zu bestimmen, die in allen Punkten der Fläche $F(x, y, z) = 0$ den beiden Bedingungen

$$(12) \quad -L = da\,dx + db\,dy + dc\,dz = 0, a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

genügen. Daher

Satz 5. Die Gleichungen (12) stellen in Verbindung mit $F = 0$ die Differentialgleichungen der Asymptotenlinien der Fläche dar.

Es bleibt noch übrig, an Stelle der Richtungskosinus a, b, c die partiellen Ableitungen F_1, F_2, F_3 von $F(x, y, z)$ einzuführen, um die Formeln unmittelbar zum Gebrauch fertig zu haben. Nach § 15, (21) und (22) war

$$(13) \qquad a = VF_1, \; b = VF_2, \; c = VF_3,$$

$$(14) \qquad 1 : V^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Die Gleichung $\Sigma a\,dx = 0$ ergibt also (vgl. § 15, (4))

$$(15) \qquad F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = 0.$$

Aus (13) und (14) folgt weiter

$$(16) \qquad \begin{gathered} da = V\,dF_1 + F_1\,dV, \; db = V\,dF_2 + F_2\,dV, \\ dc = V\,dF_3 + F_3\,dV, \end{gathered}$$

wo für dF_1, dF_2, dF_3 die Werte aus § 15, (6a) einzusetzen sind.

Die Bedingungen für zwei konjugierte Richtungen dx_1, dy_1, dz_1 und dx_2, dy_2, dz_2 lauten daher nach (4)

$$
\begin{gathered}
F_1\,dx_1 + F_2\,dy_1 + F_3\,dz_1 = 0, \\
F_1\,dx_2 + F_2\,dy_2 + F_3\,dz_2 = 0, \\
F_{11}\,dx_1\,dx_2 + F_{22}\,dy_1\,dy_2 + F_{33}\,dz_1\,dz_2 \\
+ F_{23}(dy_1\,dz_2 + dz_1\,dy_2) + F_{31}(dz_1\,dx_2 + dx_1\,dz_2) \\
+ F_{12}(dx_1\,dy_2 + dy_1\,dx_2) = 0.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Man sieht, daß die Gleichungen in den Differentialen dx_1, dy_1, dz_1 und dx_2, dy_2, dz_2 symmetrisch gebaut sind.

Als Differentialgleichung der Krümmungslinien erhält man nach (11) neben (15) die Gleichung

$$
M = V^2 \begin{vmatrix} F_1 & dF_1 & dx \\ F_2 & dF_2 & dy \\ F_3 & dF_3 & dz \end{vmatrix} = 0
$$

oder nach Division mit V^2

$$
\begin{vmatrix} F_1 & F_{11}\,dx + F_{12}\,dy + F_{13}\,dz & dx \\ F_2 & F_{21}\,dx + F_{22}\,dy + F_{23}\,dz & dy \\ F_3 & F_{31}\,dx + F_{32}\,dy + F_{33}\,dz & dz \end{vmatrix} = 0. \tag{18}
$$

Endlich erhält man als Differentialgleichung der Asymptotenlinien nach (12) neben (15) die Gleichung

$$
-L = V(dF_1\,dx + dF_2\,dy + dF_3\,dz) = 0
$$

oder nach Division mit V

$$
\begin{gathered}
F_{11}\,dx^2 + F_{22}\,dy^2 + F_{33}\,dz^2 \\
+ 2F_{23}\,dy\,dz + 2F_{31}\,dz\,dx + 2F_{12}\,dx\,dy = 0.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Dieselbe Gleichung resultiert aus (17), wenn dx_1, dy_1, dz_1 und dx_2, dy_2, dz_2 durch dx, dy, dz ersetzt werden.

Ist die Fläche in der Form

$$
z = f(x, y) \tag{20}
$$

gegeben, so kann man setzen

$$
F(x, y, z) = z - f(x, y = 0.
$$

Hieraus folgt unter Benutzung der in § 16, (2) eingeführten Abkürzungen

$$F_1 = -p, \quad F_2 = -q, \quad F_3 = 1;$$
$$F_{11} = -r, \quad F_{12} = F_{21} = -s, \quad F_{22} = -t;$$
$$F_{31} = F_{13} = 0, \quad F_{23} = F_{32} = 0, \quad F_{33} = 0.$$

Außerdem ist

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so daß nur die Differentiale dx und dy auftreten.

Es ergibt sich als Bedingung für zwei konjugierte Richtungen dx_1, dy_1 und dx_2, dy_2

$$r\,dx_1\,dx_2 + s\,(dx_1\,dy_2 + dy_1\,dx_2) + t\,dy_1\,dy_2 = 0. \tag{17a}$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird

$$\begin{aligned} dx^2[pqr - s(1+p^2)] - dy^2[pqt - s(1+q^2)] \\ + dx\,dy\,[r(1+q^2) - t(1+p^2)] = 0, \end{aligned} \tag{18a}$$

und die Differentialgleichung der Asymptotenlinien

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{19a}$$

Die Gleichungen (18a) und (19a) lassen sich noch durch Einführung der totalen Differentiale dz, dp und dq in eine einfachere Form bringen. Es ist nämlich:

$$dz = p\,dx + q\,dy; \quad dp = r\,dx + s\,dy; \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Hierdurch geht (18a) über in

$$(dx + p\,dz)\;dq - (dy + q\,dz)\;dp = 0, \tag{18b}$$

und (19a) in

$$dp\,dx + dq\,dy = 0. \tag{19b}$$

Bemerkung. Die Differentialgleichungen (18a) und (19a) ergeben durch Integration sofort die Projektionen der Krümmungslinien, bezw. Asymptotenlinien auf die xy-Ebene und damit diese Kurvensysteme auf der Fläche selbst.

§ 22. Allgemeine Formeln für die Hauptkrümmungsradien. Krümmungsmass. Kreispunkte.

Nachdem im vorigen Paragraphen die Gleichungen für die konjugierten Richtungen, Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen für die allgemeine Flächenform $F(x,y,z) = 0$ aufgestellt worden sind, haben wir nun noch

für diesen Fall die in § 18 definierten metrischen Größen, nämlich die Krümmungsradien ebener Schnitte, insbesondere die Hauptkrümmungsradien, zu bilden. Wir gehen hierbei aus von den im I. Abschnitt für den Krümmungsradius r einer Raumkurve aufgestellten Formeln, die natürlich auch für den speziellen Fall ebener Schnittkurven gelten und beginnen mit der Bestimmung des Krümmungsradius eines schiefen Schnittes. Es war in § 4, (4) gefunden

$$\frac{l}{r} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3}, \quad \frac{m}{r} = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^3},$$

$$\frac{n}{r} = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^3},$$

wo l, m, n die Richtungskosinus der Hauptnormale der Kurve, in unserem Falle also die der Kurvennormale des ebenen Schnittes, sind. Multiplizieren wir diese Gleichungen bezüglich mit a, b, c und addieren, so folgt, da nach § 20, (3) $\Sigma\, a\, d\, x = 0$ ist, die Gleichung

$$\frac{al + bm + cn}{r} = \frac{a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z}{ds^2}.$$

Nach Einl. (6) ist aber $al + bm + cn$ der Kosinus des Neigungswinkels der Normale des schiefen Schnittes gegen die Flächennormale oder gegen die Normale des zugehörigen Normalschnittes. Dieser Winkel war in § 18 mit H bezeichnet (vgl. Fig. 12); wir haben also unter Berücksichtigung von § 20, (12):

$$\text{(1)} \qquad \frac{\cos H}{r} = \frac{\Sigma\, a\,d^2x}{ds^2} = -\frac{\Sigma\, da\,dx}{ds^2} = \frac{L}{ds^2}.$$

Dies ist die Meusniersche Gleichung (§ 18, Gl. 15) für die allgemeine Flächenform.

Um aus (1) den Krümmungsradius R des zugehörigen Normalschnittes herzuleiten, haben wir einfach $H = 0$ zu setzen und erhalten so

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{R} = \frac{\Sigma\, a\,d^2x}{ds^2} = -\frac{\Sigma\, da\,dx}{ds^2} = \frac{L}{ds^2}.$$

Dies ist die Eulersche Gleichung (§ 18, Gl. 6) für die allgemeine Flächenform.

Die Fortschreitungsrichtung auf der Fläche, zu der die Radien r und R gehören, ist in (1) und (2) statt durch den in § 18 eingeführten Winkel φ durch die Verhältnisse der Differentiale dx, dy, dz bestimmt, die noch der Bedingung $\sum a\,dx = 0$ unterworfen sind.

Aus (2) werden endlich die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 bestimmt; hierzu sind aus den Gleichungen § 21, (11)

$$(3)\quad M = \begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} = 0\,, \quad a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

die Verhältnisse $dx : dy : dz$ zu berechnen und in (2) einzusetzen; wir haben also den

Satz 1. Die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 ergeben sich, wenn man aus (3) die den Hauptkrümmungsrichtungen entsprechenden Verhältnisse $dx_1 : dy_1 : dz_1$ und $dx_2 : dy_2 : dz_2$ bestimmt und in (2) einträgt.

Die Berechnung von R_1 und R_2 gestaltet sich indessen einfacher, wenn man den am Schluß von § 19 abgeleiteten Satz benutzt, daß sich die in zwei Nachbarpunkten P und P' errichteten Normalen einer Fläche dann und nur dann schneiden, wenn PP' eine der Hauptkrümmungsrichtungen ist. Der Schnittpunkt M der beiden Normalen ist dann natürlich der Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Hauptschnitts, die Entfernung $MP = MP'$ der eine Hauptkrümmungsradius. Bezeichnen wir denselben mit R, die Koordinaten von M mit ξ, η, ζ, so ist

$$\begin{aligned} \xi &= x + Ra = x + dx + R(a + da)\,, \\ \eta &= y + Rb = y + dy + R(b + db)\,, \\ \zeta &= z + Rc = z + dz + R(c + dc)\,. \end{aligned}$$

In diesen Formeln ist R positiv zu nehmen, wenn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der positiven Normalenrichtung liegt, andernfalls negativ.

Aus obigen Formeln folgt

$$(4)\quad dx + R\,da = 0\,, \quad dy + R\,db = 0\,, \quad dz + R\,dc = 0\,.$$

Diese Gleichungen, die man übrigens auch durch geschickte Kombination aus (2) und (3) erhält, ermöglichen die Bestimmung der Hauptkrümmungsradien. Zunächst ergeben sich jedoch einige wichtige Folgerungen aus (4). Bezeichnen wir die Bogenelemente der zu R_1 und R_2 gehörigen Hauptkrümmungsrichtungen mit ds_1 und ds_2, ihre sphärischen Bilder (vgl. § 20) mit ds_{01} und ds_{02}, die Projektionen der letzteren auf die Achsen mit da_1, db_1, dc_1 und da_2, db_2, dc_2, so hat man nach (4)

(5a) $R_1\, da_1 = -dx_1\,,\ R_1\, db_1 = -dy_1\,,\ R_1\, dc_1 = -dz_1\,,$

(5b) $R_2\, da_2 = -dx_2,\ R_2\, db_2 = -dy_2\,,\ R_2\, dc_2 = -dz_2\,,$

und nach § 21, (6)

(6) $$da_1\, da_2 + db_1\, db_2 + dc_1\, dc_2 = 0.$$

Die letzten Gleichungen ergeben den [vgl. auch § 21, Zusatz von Satz 1.]

Satz 2. Die sphärischen Bilder der Hauptkrümmungsrichtungen sind diesen parallel und, wie diese, aufeinander senkrecht.

Quadriert man ferner die Gleichungen (5a) und addiert sie, und verfährt ebenso mit den Gleichungen (5b), so ergibt sich (vgl. § 20, (8)]

$$R_1^2\, ds_{01}^2 = ds_1^2, \qquad R_2^2\, ds_{02}^2 = ds_2^2,$$

und hieraus

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{ds_{01}\, ds_{02}}{ds_1\, ds_2}.$$

Da nun die Bogenelemente ds_1 und ds_2 sowohl, als ihre sphärischen Bilder ds_{01} und ds_{02} aufeinander senkrecht stehen, so ist $ds_1\, ds_2$ nach § 15, (18) das Flächenelement dJ, $ds_{01}\, ds_{02}$ sein sphärisches Bild dJ_0. Wir haben also

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{dJ_0}{dJ}.$$

Diese Gleichung enthält den

Satz 3 (von Gauß).*) Das Produkt $\frac{1}{R_1 R_2}$ der Hauptkrümmungen in einem Punkt P einer Fläche

*) Gauß, „Disquisitiones generales circa superficies curvas". Commentationes Soc. Scient. Gottingensis recentiores Vol. VI, Göttingen 1828. Siehe auch Gauß' Werke, 4. Bd.

(das sog. „Krümmungsmaß“, vgl. § 18, (8)) ist gleich dem Verhältnis des sphärischen Bildes (dJ_0) des Flächenelementes zu diesem Flächenelement (dJ) selbst.

Dieser schöne Satz ist das Analogon zu dem Satz über die Krümmung der Raumkurven (§ 3, Schluß); an Stelle des Linienelements dort tritt hier das Flächenelement. Daß in der Tat das Verhältnis des sphärischen Bildes eines Flächenelements zu diesem Flächenelement selbst ein Maß für die Krümmung der Fläche abgibt, ist, auch abgesehen von der Analogie mit den Kurven, leicht einzusehen.

Wir betrachten nämlich das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten ds_1 und ds_2 sind, und das $= \frac{1}{2} dJ$ ist. Ebenso ist sein sphärisches Bild $= \frac{1}{2} dJ_0$. Je stärker nun die Fläche in dem betr. Punkt gekrümmt ist, desto mehr werden die in den Ecken dieses Dreiecks errichteten Flächennormalen in ihrer Richtung von einander abweichen, desto größer also sein sphärisches Bild, und damit auch das Verhältnis des letzteren zu dem Dreieck selbst sein. Dieses Verhältnis bildet also ein Maß für die Krümmung; jenes ist aber $= \frac{dJ_0}{dJ}$ oder (nach Satz 3) $= \frac{1}{R_1 R_2}$. Damit ist die in § 18, S. 90 zunächst ohne weitere Begründung eingeführte Bezeichnung „Krümmungsmaß“ für das Produkt $\frac{1}{R_1 R_2}$ als berechtigt erwiesen.

Wir kehren nun zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien zurück, die, wie schon bemerkt, mit Hilfe der Gleichungen (4) geschieht. Führen wir dort für da, db, dc ihre Werte aus § 20, (5) ein, so erhalten wir drei in dx, dy, dz lineare und homogene Gleichungen. Durch Elimination dieser drei Differentiale erhalten wir folgende Bestimmungsgleichung für R

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{R} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{R} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{1}{R} \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach Potenzen von $\frac{1}{R}$ geordnet

$$\frac{1}{R^3} - \frac{h}{R^2} + \frac{k}{R} + l = 0. \tag{8a}$$

Die Koeffizienten h, k, l sind hierbei noch aus (8) zu bestimmen. Zunächst ist offenbar l die in § 20, (11) auftretende Determinante; also ist $l = 0$. Die Gleichung (8a) reduziert sich nun nach Weglassung des Faktors $\frac{1}{R}$ auf

$$\frac{1}{R^2} - \frac{h}{R} + k = 0. \tag{9}$$

Man sieht hieraus, daß der Koeffizient h die mittlere Krümmung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, k das Krümmungsmaß $\frac{1}{R_1 R_2}$ bedeutet. Die Werte von h und k bestimmen sich aus (8): h ist der negative Koeffizient von $\frac{1}{R^2}$, k der Koeffizient von $\frac{1}{R}$. Man erhält

$$h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right), \tag{10}$$

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial c}{\partial z} & \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial a}{\partial x} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Gl. (8) kann auch so geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{R} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} & a \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{R} & \frac{\partial b}{\partial z} & b \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{1}{R} & c \\ \frac{a}{R} & \frac{b}{R} & \frac{c}{R} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8b}$$

Multipliziert man nämlich die drei ersten Horizontalreihen in (8b) bezüglich mit a, b, c und subtrahiert ihre Summe

von der vierten, so erhält man die linke Seite von (8) mit negativem Vorzeichen, wenn man § 20, (2) und (10) beachtet. Hier kann man nun noch statt a, b, c und ihren partiellen Ableitungen die partiellen Ableitungen der Funktion $F(x, y, z)$ einführen, indem man die Gleichungen (21) und (22) des § 15 benutzt. Dort war $a = VF_1$ usw., woraus folgt

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} F_1 + V F_{11} \text{ usw.}$$

Diese Werte trägt man in (8b) ein, multipliziert die letzte Vertikalreihe der Reihe nach mit $\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial z}$ und subtrahiert sie von der ersten, zweiten und dritten. Nach Division mit V^4 ergibt sich

$$\text{(8c)} \quad \begin{vmatrix} F_{11} + \frac{1}{VR} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} + \frac{1}{VR} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} + \frac{1}{VR} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Hieraus ergeben sich für h und k die Werte:

$$\text{(10a)} \quad \begin{aligned} h = V^3 [2 (F_{23} F_2 F_3 + F_{31} F_3 F_1 + F_{12} F_1 F_2) \\ - F_{11} (F_2^2 + F_3^2) - F_{22} (F_3^2 + F_1^2) - F_{33} (F_1^2 + F_2^2)], \end{aligned}$$

$$\text{(11a)} \quad k = -V^4 \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} .$$

Die in (11a) stehende Determinante heißt die Hesse'sche Determinante. Sie gibt, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Fläche (Hesse'sche Fläche); diese schneidet aus der gegebenen Fläche eine Kurve aus, für deren sämtliche Punkte $k = o$, also einer der Hauptkrümmungsradien unendlich ist; d. h. es sind die parabolischen Punkte der Fläche.

Diese Punkte bilden also eine Kurve, welche die

parabolische Kurve der Fläche heißt. Die parabolische Kurve trennt, wie schon in § 17 bemerkt wurde, die Flächenteile mit positivem Krümmungsmaß von denen mit negativem Krümmungsmaß, oder die elliptischen Punkte von den hyperbolischen. Die elliptischen und hyperbolischen Punkte erfüllen also ganze *Flächenteile*; die parabolischen nur eine *Kurve*.

Anmerkung. Der Übergang von Flächenteilen positiver Krümmung zu solchen negativer Krümmung kann übrigens auch dadurch erfolgen, daß $k = \infty$, also einer der Hauptkrümmungsradien $= 0$ wird. Solche Punkte können indessen nicht mehr als parabolische im Sinne der S. 79 u. 90 gegebenen Definition bezeichnet werden; es sind vielmehr *singuläre* Punkte, oder Kurven von solchen (z. B. Knotenpunkte, Rückkehrkanten u. s. w.) Ein einfaches Beispiel bietet die Fläche, die entsteht, wenn ein Kreis um eine ihn schneidende Gerade rotiert. Die beiden Schnittpunkte trennen dann positiv und negativ gekrümmte Flächenpartien, können aber nicht als parabolische Punkte gelten; sie gehören der parabolischen Kurve nur dann an, wenn man diese nicht als Ort der parabolischen Punkte, sondern im weiteren Sinne als Grenze zwischen den positiv und negativ gekrümmten Flächenteilen definiert.

Wir behandeln zum Schluß noch einige Aufgaben.

1. *Aufgabe. Die Hauptkrümmungsradien für die Flächenform $z = f(x, y)$ zu bestimmen.*

Aus (8c) und § 21, (20) f. folgt leicht

$$(12)\quad \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R}\,\frac{r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} + \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = 0,$$

also ist

$$(13)\quad h = \frac{r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}},\quad k = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Die parabolische Kurve der Fläche hat die Gleichung

$$(14)\qquad rt - s^2 = 0.$$

2. *Aufgabe. Die Kreispunkte (Nabelpunkte) einer Fläche zu bestimmen.*

Die Kreispunkte sind nach § 18, S. 89 f., dadurch charakterisiert, daß in ihnen $R_1 = R_2$ wird. Da R_1 und R_2 für eine gegebene Fläche bekannte Funktionen von x, y, z sind, so stellt die Gleichung $R_1 = R_2$ eine Fläche vor, deren Schnittkurve mit $F(x, y, z) = 0$ der geometrische Ort der

Kreispunkte sein muß. Man sollte demnach auf jeder Fläche eine Kurve von Kreispunkten erwarten; dem ist aber nicht so. Die Gleichung $R_1 - R_2 = 0$ ist nämlich von der Form $A^2 + B^2 = 0$, wo A und B Funktionen von x, y, z sind. Sie stellt also eine imaginäre Fläche mit reeller Doppelkurve dar, und die Gleichungen der letzteren sind $A = 0$, $B = 0$. Diesen beiden Gleichungen müssen also die Koordinaten eines reellen Kreispunktes genügen und außerdem natürlich der Flächengleichung $F(x, y, z) = 0$. Es gibt daher auf einer Fläche im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl reeller Kreispunkte. Die Gleichung $R_1 - R_2 = 0$ erhält man durch Nullsetzen der Diskriminante der Gleichung (9), also

$$h^2 - 4k = 0.$$

Für die Flächenform $z = f(x, y)$ erhält, wie eine kleine Rechnung zeigt, diese Gleichung nach (13) die Form

$$\frac{(1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)}{(rt-s^2)^2} \times$$

$$\left\{\left[2s - \frac{pqr}{1+p^2} - \frac{pqt}{1+q^2}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + (1+p^2+q^2)\left[\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right]^2\right\} = 0.$$

Für reelle Kreispunkte erhält man also die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{2s}{pq} - \frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2} = 0, \quad \frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2} = 0,$$

oder

$$\frac{s}{pq} = \frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2}. \tag{15}$$

Wenn nun die Koordinaten eines Flächenpunktes diesen beiden Gleichungen genügen, so verschwinden für einen solchen Punkt die Koeffizienten der Differentialgleichung der Krümmungslinien (§ 21, Gl. 18a) einzeln, wie man leicht sieht. In einem Kreispunkt genügt also jede Fortschreitungsrichtung dieser Differentialgleichung. Dies ist auch geometrisch leicht abzuleiten. Denn für einen Kreispunkt ist die Indikatrix ein Kreis, das Schmiegungs-

paraboloid ein Rotationsparaboloid, also wird die Normale des Kreispunktes von allen Nachbarnormalen getroffen, mithin muß jede Fortschreitungsrichtung der für die Hauptkrümmungsrichtungen aufgestellten Bedingung genügen.

Hieraus darf jedoch nicht gefolgert werden daß durch einen Kreispunkt unendlich viele Krümmungslinien hindurchgehen. Das Verhalten der Krümmungslinien in einem solchen Punkt erfordert vielmehr eine besondere Untersuchung. Wir behandeln daher die

3. Aufgabe. Das Verhalten der Krümmungslinien in einem Kreispunkt zu untersuchen.

Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in den Kreispunkt und nehmen die Flächennormale als z-Achse; die xy-Ebene ist also Tangentialebene im Kreispunkt. Wir setzen weiter voraus, daß der Kreispunkt ein „regulärer" Punkt der Fläche sei, so daß sich z nach Potenzen von x und y entwickeln läßt. Man erhält so eine Entwicklung von der Form

$$(16) \quad z = A(x^2 + y^2) + Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ey^3 \\ + Fx^4 + Gxy^3 + \ldots$$

Die Gleichung $z = A(x^2 + y^2)$ ist die Gleichung für das Schmiegungsparaboloid, das hier im Kreispunkt ein Rotationsparaboloid ist. In Kreispunkten besonderer Art kann A auch gleich Null sein; dies würde dem Falle $r = s = t = 0$ in den Gleichungen (15) entsprechen; in einem solchen Punkte sind [vgl. (12)] alle Krümmungshalbmesser unendlich groß. Das Folgende gilt für beide Arten von Kreispunkten. Geht man nur bis zu unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung, so schneiden freilich alle Normalen, die der z-Achse benachbart sind, diese selbst. Zieht man aber in (16) auch noch die Glieder dritter Ordnung in Betracht, so erhält man gewisse vom Ursprung ausgehende Flächenrichtungen, für die der kürzeste Abstand der Nachbarnormale von der z-Achse in höherem Grade unendlich klein ist, als für die übrigen der z-Achse benachbarten Normalen. Diese ausgezeichneten Richtungen sind im Ursprung als die Krümmungsrichtungen anzusprechen. Aus der Gleichung der Normalen § 16, (4) folgt nun als Bedingung dafür, daß die Normale im Punkt (x, y, z) die z-Achse trifft

$$x : y = p : q. \tag{17}$$

Nun ist

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2Ax + 3Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 + \ldots$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2Ay + Cx^2 + 2Dxy + 3Ey^2 + \ldots,$$

man erhält also nach (17)

$$Cx^3 + (2D - 3B)x^2y + (3E - 2C)xy^2 - Dy^3 + \ldots = 0. \tag{18}$$

Sieht man nun x und y als unendlich kleine Größen an, so erhält man mit Vernachlässigung aller Glieder, die von höherer als der dritten Ordnung unendlich klein sind, zur Bestimmung von $\frac{y}{x}$ die kubische Gleichung

$$Cx^3 + (2D - 3B)x^2y + (3E - 2C)xy^2 - Dy^3 = 0. \tag{19}$$

Daraus folgt, daß durch den Kreispunkt drei Krümmungslinien hindurchgehen: diese können reell und verschieden sein, oder eine ist reell, die zwei anderen imaginär (vgl. die Kreispunkte des Ellipsoids), oder eine ist reell, die zwei andern reell, aber zusammenfallend, oder endlich alle drei sind zusammenfallend. Für die Fläche dritter Ordnung mit der Gleichung

$$z = A(x^2 + y^2) + Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ey^3$$

sind z. B. durch die Gleichungen (19) drei Ebenen

$$y - \lambda_1 x = 0, \quad y - \lambda_2 x = 0, \quad y - \lambda_3 x = 0$$

durch die z-Achse bestimmt, welche aus der Fläche drei durch den Kreispunkt gehende Krümmungslinien ausschneiden; diese Schnittkurven sind Krümmungslinien, weil die Flächennormalen längs dieser (ebenen) Kurven alle die z-Achse und darum auch einander treffen. Durch geeignete Verfügung über die Konstanten B, C, D, E kann man die erwähnten Möglichkeiten hervorbringen. Zum allgemeinen Fall zurückkehrend bemerken wir, daß es vorkommen kann, daß in einem Kreispunkt $B = C = D = E = 0$ sein kann. Man hätte nun die Glieder vierter Ordnung heranzuziehen und würde erkennen, daß es auch Kreispunkte geben kann,

durch die mehr als drei Krümmungslinien hindurchgehen. Ja es gibt Kreispunkte, durch die unendlich viele Krümmungslinien hindurchgehen. Läßt man z. B. eine ebene Kurve um eine ihrer Normalen rotieren, so ist der betreffende Punkt für die entstehende Rotationsfläche ein derartiger Punkt; es gehen unendlich viele Meridiane durch ihn hindurch. Immerhin sind dies aber Ausnahmefälle.

Man kann auch von der Differentialgleichung der Krümmungslinien § 21, (18a) ausgehend zu dem entwickelten Resultate gelangen, wenn auch auf weniger anschauliche Weise. Diese Gleichung kann in der Form geschrieben werden

$$P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Q\left(\frac{dy}{dx}\right) + R = 0 \tag{20}$$

geschrieben werden, wo P, Q, R drei Funktionen von x, y sind, die für einen Kreispunkt verschwinden. Denkt man sich (20) integriert und y sowie $\frac{dy}{dx}$ als Funktionen von x eingetragen, so muß die linke Seite identisch Null werden. Man darf darum die linke Seite differenzieren und erhält:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + 2P\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{d^2y}{dx^2} = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Die Krümmungslinien müssen auch dieser Gleichung genügen. Für einen Kreispunkt ist nun $P = Q = R = 0$ und man sieht jetzt, daß für einen solchen Punkt aus (21) sich drei Werte für $\frac{dy}{dx}$ ergeben.

Für das System der Krümmungslinien sind die Kreispunkte insofern singuläre Punkte, als durch einen solchen mehr als zwei Linien des Systems hindurchgehen können. Man vergleiche in dieser Beziehung die beiden Kurvensysteme der Ebene

$$x - y^2 = \text{const}, \quad x^2 - y^2 = \text{const}.$$

Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kurven (von jedem System eine) und jedem Punkt der Ebene sind

somit zwei Richtungen — die Tangenten der Systemkurven — zugeordnet, nur im Nullpunkt sind drei Richtungen vorhanden, weil hier eine der Systemkurven zerfällt.

4. Aufgabe. Die Flächen zu finden, deren sämtliche Punkte Kreispunkte sind.

I. Ist $t = 0$, so folgt aus (15) $r = s = 0$ und die Fläche ist eine Ebene.

II. Ist t nicht identisch Null, so sind auch r und s nicht identisch Null.

Man kann nun statt (15)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\}=0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\}=0$$

setzen, oder

$$\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=f(y), \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\varphi(x), \tag{22}$$

wo f reine Funktion von y, φ reine Funktion von x ist. Differenziert man die erste Gleichung partiell nach y, die zweite partiell nach x, so folgt

$$\frac{t(1+p^2)-pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}=f'(y), \quad \frac{r(1+q^2)-pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}=\varphi'(x).$$

Aus (15) folgt $\varphi'(x)=f'(y)$; da nun $\varphi'(x)$ reine Funktion von x, $f'(y)$ reine Funktion von y ist, so muß $\varphi'(x)$ und $f'(y)$ konstant $=\frac{1}{R}$ sein. Durch Integration erhält man, wenn a und b Integrationskonstante sind,

$$\varphi(x)=\frac{x-a}{R}, \quad f(y)=\frac{y-b}{R}$$

und jetzt aus (22)

$$\frac{p}{q}=\frac{x-a}{y-b}.$$

Durch nochmalige Integration bekommt man endlich

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

also eine Kugel.

Es sind nun alle Untersuchungen, die zuerst nur für eine spezielle Lage des Koordinatensystems und mit Hilfe des Schmiegungsparaboloids und der Indikatrix geführt wurden, auf die allgemeine Flächenform $F(x, y, z) = 0$ übertragen. Die Einfachheit der gefundenen Formeln beruht darauf, daß neben den Koordinaten x, y, z nur die von ihnen abhängigen Richtungskosinus a, b, c und deren Ableitungen auftreten. Diese Darstellung erweist sich auch als besonders geeignet zur Herleitung der Formeln im II. Band, Abschnitt I, für die Gaußsche Parameterform der Flächengleichung.

§ 23. Konfokale Flächen zweiter Ordnung. Elliptische Koordinaten.

Die bisherigen allgemeinen Untersuchungen sollen in den folgenden Paragraphen auf ein Beispiel, die Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, angewandt werden. Hierzu ist es indes zweckmäßig, einige Bemerkungen über konfokale Flächen und über elliptische Koordinaten vorauszuschicken.

Wir betrachten eine Fläche zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\mathfrak{J}}+\frac{y^2}{b^2+\mathfrak{J}}+\frac{z^2}{c^2+\mathfrak{J}}-1=0 \tag{1}$$

und setzen voraus, daß

$$a > b > c$$

ist.

In (1) geben wir dem Parameter $\mathfrak{J}$ alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$; wir erhalten so zu jedem Parameterwerte $\mathfrak{J}$ eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung. Man nennt die Gesamtheit aller dieser Flächen ein konfokales Flächensystem, weil jede der drei Symmetralebenen der Flächen (hier die drei Koordinatenebenen) von dem System (1) nach einer Schar konfokaler Kegelschnitte*) geschnitten wird. Wir untersuchen die Arten der Flächen, die in (1) enthalten sind und unterscheiden zu diesem Zwecke vier Intervalle, in denen $\mathfrak{J}$ liegen kann.

---

*) Vgl. S. S. VIII. Simon, a. a. O. § 48.

1. Intervall; $\mathfrak{J}$ liegt zwischen $+\infty$ und $-c^2$.

Die Nenner von x^2, y^2 und z^2 in (1) sind in diesem ganzen Intervall positiv, die drei Hauptachsen also alle reell. Alle Flächen des ersten Intervalls sind daher Ellipsoide. Nähert sich $\mathfrak{J}$ mehr und mehr dem Wert $-c^2$, so wird die in die z-Achse fallende Hauptachse immer kleiner; die Ellipsoide werden also immer flacher und gehen für $\mathfrak{J} = -c^2$ in den von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}-1=0, \quad z=0 \tag{2}$$

eingeschlossenen Teil der xy-Ebene über; derselbe ist als degeneriertes Ellipsoid doppelt zu rechnen. Diese Ellipse heißt die Fokalellipse.

2. Intervall; $\mathfrak{J}$ liegt zwischen $-c^2$ und $-b^2$.

Der Nenner von z^2 ist jetzt negativ geworden, die in die z-Achse fallende Hauptachse also imaginär. Alle Flächen des zweiten Intervalls sind also einmantlige Hyperboloide mit der z-Achse als imaginärer Hauptachse. Ist zunächst $\mathfrak{J}$ von $-c^2$ sehr wenig verschieden, so haben wir sehr plattgedrückte Hyperboloide, die in der Grenze ($\mathfrak{J} = -c^2$) mit dem außerhalb der Fokalellipse (2) liegenden Stück der xy-Ebene zusammenfallen. Diese Ellipse bildet also den Übergang von den Ellipsoiden zu den einmantligen Hyperboloiden. Nähert sich $\mathfrak{J}$ dem Wert $-b^2$, so wird die in die y-Achse fallende Hauptachse immer kleiner, die Hyperboloide werden in dieser Richtung immer flacher und gehen schließlich in der Grenze in das von der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}-1=0, \ y=0 \tag{3}$$

begrenzte Stück der xz-Ebene über, welches die z-Achse enthält; dasselbe ist wieder doppelt zu rechnen. Diese Hyperbel geht durch die Brennpunkte der Fokalellipse und heißt die Fokalhyperbel.

3. Intervall; $\mathfrak{J}$ liegt zwischen $-b^2$ und $-a^2$.

Die Nenner von y^2 und z^2 sind negativ geworden; die beiden Hauptachsen, welche in die y- und z-Achse fallen,

sind imaginär. Alle Flächen des dritten Intervalls sind zweimantlige Hyperboloide mit der x-Achse als reeller Achse. Ist zunächst wieder $\mathfrak{J}$ von $-b^2$ sehr wenig verschieden, so haben wir den von der Fokalhyperbel (3) begrenzten Teil der xz-Ebene, welcher die z-Achse nicht enthält, als degeneriertes zweimantliges Hyperboloid aufzufassen. Kommt $\mathfrak{J}$ immer näher an $-a^2$, so rücken die Scheitel der Hyperboloide auf der x-Achse immer näher an den Koordinatenursprung, der der gemeinsame Mittelpunkt aller Flächen des Systems ist. Schließlich entarten die Hyperboloide für $\mathfrak{J} = -a^2$ in die doppelt zu rechnende yz-Ebene.

4. Intervall; $\mathfrak{J}$ liegt zwischen $-a^2$ und $-\infty$.

Alle Flächen des vierten Intervalls sind imaginär.

Durch jeden Raumpunkt (x, y, z) gehen nun drei Flächen des Systems und zwar ein Ellipsoid, ein einmantliges Hyperboloid und ein zweimantliges Hyperboloid. Gibt man nämlich in (1) den Koordinaten x, y, z irgend welche feste Werte, und bestimmt dann $\mathfrak{J}$ aus (1), so ergibt sich eine kubische Gleichung für $\mathfrak{J}$. Diese hat drei reelle Wurzeln, von denen je eine im ersten, zweiten und dritten Intervall liegt. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man die Bestimmungsgleichung für $\mathfrak{J}$ nach Potenzen von $\mathfrak{J}$ ordnet, also in die Form bringt

$$\mathfrak{J}^3 + A\mathfrak{J}^2 + B\mathfrak{J} + C = 0,$$

wo A, B, C Funktionen von x, y, z; a^2, b^2, c^2 sind. Setzt man in dieser Gleichung für $\mathfrak{J}$ der Reihe nach die Werte $\mathfrak{J} = -a^2$, $\mathfrak{J} = -b^2$, $\mathfrak{J} - c^2$, $\mathfrak{J} = \infty$ ein, so tritt mit jedem neuen Wert ein Wechsel des Vorzeichens der linken Seite ein, woraus folgt, daß zwischen je zweien dieser Werte eine Wurzel der Gleichung liegt. Bezeichnen wir mit λ die Wurzel im ersten Intervall, mit μ die im zweiten, mit ν die im dritten, so stellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0\,, \\ (4) \qquad &\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} - 1 = 0\,, \\ &\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} - 1 = 0 \end{aligned}$$

drei Flächen dar, von denen die erste ein Ellipsoid, die zweite ein einmantliges, die dritte ein zweimantliges Hyperboloid ist, und die alle drei durch den Punkt gehen, dessen Koordinaten die oben angenommenen festen Werte von x, y, z sind, und der mit P bezeichnet sei.

Wir können daher die Lage des Punktes P statt durch die gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten x, y, z ebensogut durch Angabe der Parameter λ, μ, ν der drei Flächen (4) des Systems bestimmen, welche durch den Punkt P gehen: man nennt dann die Größen λ, μ, ν die elliptischen Koordinaten des Punktes P. Da λ, μ, ν bei gegebenem x, y, z die Wurzeln der Gleichung (1) sind, so haben wir die Identität

$$(5)\quad \frac{x^2}{a^2+\mathfrak{z}}+\frac{y^2}{b^2+\mathfrak{z}}+\frac{z^2}{c^2+\mathfrak{z}}-1=-\frac{(\mathfrak{z}-\lambda)(\mathfrak{z}-\mu)(\mathfrak{z}-\nu)}{(a^2+\mathfrak{z})(b^2+\mathfrak{z})(c^2+\mathfrak{z})};$$

denn die linke, wie die rechte Seite verschwindet für $\mathfrak{z}=\lambda$ $\mathfrak{z}=\mu$, $\mathfrak{z}=\nu$, und der Koeffizient von $\mathfrak{z}^3$ ist nach Multiplikation mit $(a^2+\mathfrak{z})(b^2+\mathfrak{z})(c^2+\mathfrak{z})$ links wie rechts $=-1$. Die Identität (5), die für alle Werte von $\mathfrak{z}$ gilt, benutzen wir nun dazu, x, y, z durch λ, μ, ν auszudrücken, indem wir mit $(a^2+\mathfrak{z})(b^2+\mathfrak{z})(c^2+\mathfrak{z})$ durchmultiplizieren und für $\mathfrak{z}$ der Reihe nach die Werte $\mathfrak{z}=-a^2$, $\mathfrak{z}=-b^2$, $\mathfrak{z}=-c^2$ einsetzen. Wir erhalten so

$$(6)\quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};\\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)};\\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen erhält man auch durch Auflösen von (4) nach x^2, y^2, z^2. Jedem Wertetripel elliptischer Koordinaten λ, μ, ν entspricht ein Wertetripel rechtwinkliger Koordinaten x^2, y^2, z^2. Die Gleichungen (6) zeigen, daß x, y, z nur dann reell werden, wenn die drei Größen λ, μ, ν in den oben angegebenen Intervallen liegen; μ ν sind daher stets negativ.

Zu späterer Benutzung fügen wir noch einige für die Rechnung mit elliptischen Koordinaten wichtigen Relationen bei.

Zieht man in (4) je zwei Gleichungen von einander ab, so folgt

$$\sum \frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} = 0; \quad \sum \frac{x^2}{(a^2+\mu)(a^2+\nu)} = 0;$$

$$(7) \qquad \sum \frac{x^2}{(a^2+\nu)(a^2+\lambda)} = 0.$$

Hierbei gehen die einzelnen Glieder jeder dieser und der folgenden Summen aus dem ersten durch zyklische Vertauschung von x, y, z und a, b, c hervor.

Dividiert man die Gleichungen (6) bezüglich durch $(a^2+\lambda)^2$, $(b^2+\lambda)^2$, $(c^2+\lambda)^2$ und addiert, so erhält man, wenn die Brüche rechts auf gemeinsamen Nenner gebracht werden

$$(8) \qquad \sum \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

sowie zwei analoge Gleichungen, die sich durch zyklische Vertauschung von λ, μ, ν ergeben. Aus (8) folgt weiter

$$\sum \frac{x^2(a^2+\mu)}{(a^2+\lambda)^2(a^2+\mu)} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

und aus (7)

$$\sum \frac{x^2(a^2+\lambda)}{(a^2+\lambda)^2(a^2+\mu)} = 0.$$

Durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$(9) \qquad \sum \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2(a^2+\mu)} = \frac{\nu-\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Ebenso findet man

$$(9a) \qquad \sum \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2(a^2+\nu)} = \frac{\mu-\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

sowie die weiteren durch zyklische Vertauschung von λ, μ, ν aus (9) und (9a) hervorgehenden Gleichungen.

Zieht man in (7) je zwei Gleichungen voneinander ab, so folgt

$$\sum \frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)} = 0 . \tag{10}$$

Wir bilden endlich noch das Linienelement ds des Raumes für elliptische Koordinaten. Zu diesem Zweck nehmen wir in (6) auf beiden Seiten den Logarithmus; durch Differenzieren folgt dann

$$\begin{aligned} 2\,dx &= \frac{x\,d\lambda}{a^2+\lambda} + \frac{x\,d\mu}{a^2+\mu} + \frac{x\,d\nu}{a^2+\nu}, \\ 2\,dy &= \frac{y\,d\lambda}{b^2+\lambda} + \frac{y\,d\mu}{b^2+\mu} + \frac{y\,d\nu}{b^2+\nu}, \\ 2\,dz &= \frac{z\,d\lambda}{c^2+\lambda} + \frac{z\,d\mu}{c^2+\mu} + \frac{z\,d\nu}{c^2+\nu}. \end{aligned} \tag{11}$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen folgt unter Berücksichtigung von (7) und (8)

$$4\,ds^2 = \sum \frac{d\lambda^2(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}, \tag{12}$$

wo die übrigen Glieder der Summe durch zyklische Vertauschung von λ, μ, ν aus dem ersten hervorgehen.

An die Gleichungen (7) knüpfen wir noch den Beweis eines wichtigen Satzes, nämlich

Satz. Die durch (4) dargestellten konfokalen Flächen zweiter Ordnung schneiden sich allenthalben rechtwinklig.

Beweis. Es sei $P(x, y, z)$ irgend ein Punkt der Schnittkurve, etwa der beiden ersten Flächen, so verhalten sich nach § 15, (20) die Richtungskosinus der Normalen der ersten Fläche wie

$$\frac{x}{a^2+\lambda} : \frac{y}{b^2+\lambda} : \frac{z}{c^2+\lambda}$$

und die der zweiten Fläche wie

$$\frac{x}{a^2+\mu} : \frac{y}{b^2+\mu} : \frac{z}{c^2+\mu}.$$

Nach Einl. (8) sagt daher die erste Gleichung (7) aus, daß diese beiden Normalen zueinander senkrecht sind, *q. e. d.* Drei Flächensysteme, die sich überall rechtwinklig schneiden, nennt man ein dreifach orthogonales System. Der obige Satz läßt sich daher auch so formulieren: Die konfokalen Flächen zweiter Ordnung bilden ein dreifach orthogonales Flächensystem (vgl. Fig. 14).

Gibt man in (6) λ einen konstanten Wert, etwa $\lambda = 0$, während μ und ν veränderlich bleiben, so liegen die durch (6) dargestellten Punkte alle auf dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Fig. 14.

Wir haben hier schon einen besonderen Fall der im I. Abschnitt des II. Bandes zu behandelnden, von Gauß*) eingeführten Form der Gleichung einer Fläche, bei der die Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes ausgedrückt sind als Funktionen zweier veränderlichen Parameter, hier μ und ν. Läßt man in (6) auch μ konstant, also nur ν variabel, so beschreibt der Punkt x, y, z auf dem Ellipsoid eine Kurve. Aus dem oben bewiesenen Satz folgt nun, daß die durch $\mu =$ konst. und $\nu =$ konst. dargestellten Kurvensysteme auf dem Ellipsoid sich überall rechtwinklig schneiden. Wir werden im folgenden Paragraphen sehen, daß diese Kurven (Schnittkurven des Ellipsoids mit den beiden Scharen von konfokalen Hyperboloiden) die Krümmungslinien des Ellipsoids sind.

*) Gauß' Werke IV, S. 189. In spezieller Form tritt die Parameterdarstellung zuerst bei Euler auf (De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet. Novi Conm. Petrop XVI. 1771. p. 3—34).

§ 24. Krümmungslinien der konfokalen Flächen zweiter Ordnung. Satz von Dupin.

Die Entwickelungen des § 23 führen nunmehr zu folgendem

Satz 1. Die Schnittkurve zweier Flächen eines konfokalen Systems zweiter Ordnung ist Krümmungslinie für beide Flächen.

Oder

Die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems zweiter Ordnung schneiden sich allenthalben nach Krümmungslinien.

Beweis. Wir betrachten die beiden Flächen

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}-1=0 \tag{2}$$

und beweisen, daß die Schnittkurve von (1) und (2) Krümmungslinie von (1) ist. Aus § 21, (18) ergibt sich als Differentialgleichung der Krümmungslinien von (1)

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2+\lambda} & \frac{dx}{a^2+\lambda} & dx \\ \frac{y}{b^2+\lambda} & \frac{dy}{b^2+\lambda} & dy \\ \frac{z}{c^2+\lambda} & \frac{dz}{c^2+\lambda} & dz \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

oder ausgerechnet

$$xdy\,dz(b^2-c^2)+ydz\,dx(c^2-a^2)+zdx\,dy(a^2-b^2)=0. \tag{3a}$$

Für die Schnittkurve von (1) und (2) gelten nun die beiden Differentialgleichungen, welche durch Differenzieren von (1) und (2) folgen, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{xdx}{a^2+\lambda}+\frac{ydy}{b^2+\lambda}+\frac{zdz}{c^2+\lambda}&=0, \\ \frac{xdx}{a^2+\mu}+\frac{ydy}{b^2+\mu}+\frac{zdz}{c^2+\mu}&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt nach Einleitung (17)

$$(5) \qquad dx : dy : dz = \left\| \begin{matrix} \frac{x}{a^2+\lambda} & \frac{y}{b^2+\lambda} & \frac{z}{c^2+\lambda} \\ \frac{x}{a^2+\mu} & \frac{y}{b^2+\mu} & \frac{z}{c^2+\mu} \end{matrix} \right\|.$$

Setzt man aus (5) für dx, dy, dz die proportionalen Werte in die Differentialgleichung der Krümmungslinien (3a) ein, so zeigt sich, daß diese befriedigt wird. Man erhält nämlich durch eine einfache Rechnung für die linke Seite den Ausdruck:

$$\frac{xyz\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)}{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)\,(a^2+\mu)\,(b^2+\mu)\,(c^2+\mu)} \times \sum \frac{x^2}{(a^2+\lambda)\,(a^2+\mu)},$$

der nach § 23, (7) = Null ist. Die Schnittkurve von (1) und (2) erfüllt also die Differentialgleichung der Krümmungslinien, womit der Beweis erbracht ist. Ganz analog gestaltet sich der Beweis für die Schnittkurven der ersten und dritten Fläche in § 23, (4). Wir haben also zunächst für das Ellipsoid

Satz 2. Die erste Schar von Krümmungslinien eines Ellipsoids wird von den konfokalen einmantligen Hyperboloiden, die zweite Schar von den konfokalen zweimantligen Hyperboloiden ausgeschnitten (vgl. Fig. 14).

Es sind also für die Ellipsoide ($\lambda =$ konst.) die Kurven $\mu =$ konst. und $\nu =$ konst. die Krümmungslinien; analoges gilt für die Hyperboloide.

Die Krümmungslinien sind Raumkurven vierter Ordnung, welche sich indes auf die Symmetrieebenen des Flächensystems als Kegelschnitte projizieren, wie man leicht beweist.

Der hiermit bewiesene Satz, daß die Flächen des dreifach orthogonalen Systems zweiter Ordnung sich in Krümmungslinien schneiden, ist ein spezieller Fall eines allgemeineren Satzes; derselbe lautet:

Satz 3 (von Dupin*)). Wenn sich drei Flächenscharen überall orthogonal durchschneiden, so sind die Schnittkurven die Krümmungslinien der Flächen.

Beweis. Es mögen sich die drei Flächen

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0, \quad \Psi(x, y, z) = 0$$

überall rechtwinklig schneiden, und es sei $P(x, y, z)$ ein allen dreien gemeinsamer Punkt. Die Bedingung der Orthogonalität ist

$$F_1 \Phi_1 + F_2 \Phi_2 + F_3 \Phi_3 = 0, \tag{6}$$

$$\Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2 \Psi_2 + \Phi_3 \Psi_3 = 0, \tag{7}$$

$$\Psi_1 F_1 + \Psi_2 F_2 + \Psi_3 F_3 = 0. \tag{8}$$

Dies ist also die Bedingung dafür, daß sich die Flächen im Punkt $P(x, y, z)$ rechtwinklig schneiden. Da indes je zwei dieser Flächen, z. B. $F = 0$ und $\Phi = 0$, längs ihrer ganzen Schnittkurve aufeinander senkrecht stehen, so gilt die Gleichung (6) auch noch, wenn man auf dieser Schnittkurve zu einem Nachbarpunkt $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ weitergeht. Die Tangente dieser Schnittkurve fällt aber mit der Normalen der Fläche $\Psi = 0$ zusammen, d. h. es ist

$$dx : dy : dz = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3. \tag{9}$$

Setzt man nun in (6) $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, statt x, y, z ein, so folgt unter Berücksichtigung von (6) und (9)

$$\begin{aligned}&[\Phi_1 (F_{11}\Psi_1 + F_{12}\Psi_2 + F_{13}\Psi_3) + \Phi_2 (F_{21}\Psi_1 + F_{22}\Psi_2 + F_{23}\Psi_3) \\ &+ \Phi_3 (F_{31}\Psi_1 + F_{32}\Psi_2 + F_{33}\Psi_3)] + [F_1 (\Phi_{11}\Psi_1 + \Phi_{12}\Psi_2 \\ &+ \Phi_{13}\Psi_3) + F_2(\Phi_{21}\Psi_1 + \Phi_{22}\Psi_2 + \Phi_{23}\Psi_3) + F_3(\Phi_{31}\Psi_1 + \Phi_{32}\Psi_2 \\ &+ \Phi_{33}\Psi_3)] = 0.\end{aligned}$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir die erste eckige Klammer in obiger Gleichung mit $(\Phi\Psi)$; es ist dann offenbar $(\Phi\Psi) = (\Psi\Phi)$. Verfährt man nun mit (7) und (8) analog wie hier mit (6), so folgen die drei Gleichungen

$$(\Phi\Psi) + (F\Psi) = 0, (\Psi F) + (\Phi F) = 0, (F\Phi) + (\Psi\Phi) = 0. \tag{10}$$

Daneben ist

$$(F\Phi) = (\Phi F), \quad (\Phi\Psi) = (\Psi\Phi), \quad (\Psi F) = (F\Psi). \tag{11}$$

---

*) Dével. de Géom. p 239.

Zieht man von der halben Summe der Gleichungen (10) jede einzelne ab, so folgt unter Berücksichtigung von (11)

$$(F\Phi) = (\Phi\Psi) = (\Psi F) = 0. \tag{12}$$

Aus (6), (7) und $(\Phi\Psi) = 0$ folgt nun durch Elimination von Φ_1, Φ_2, Φ_3

$$\begin{vmatrix} \Psi_1 & F_1 & (F_{11}\Psi_1 + F_{12}\Psi_2 + F_{13}\Psi_3) \\ \Psi_2 & F_2 & (F_{21}\Psi_1 + F_{22}\Psi_2 + F_{23}\Psi_3) \\ \Psi_3 & F_3 & (F_{31}\Psi_1 + F_{32}\Psi_2 + F_{33}\Psi_3) \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus nach (9)

$$\begin{vmatrix} dx & F_1 & dF_1 \\ dy & F_2 & dF_2 \\ dz & F_3 & dF_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist aber nach § 21, (18) die Differentialgleichung der Krümmungslinien für die Fläche $F = 0$. Es fällt also in dem Punkt P die Richtung der Schnittkurve der Flächen $F = 0$ und $\Phi = 0$ in eine Hauptkrümmungsrichtung der Fläche $F = 0$. Ebenso lässt sich der Beweis für die beiden andern Flächen führen, womit der Satz von Dupin bewiesen ist.

§ 25. Geodätische Linien. Anwendung auf Rotationsflächen.

Außer den bisher betrachteten Kurvensystemen sind von besonderer Wichtigkeit die geodätischen Linien einer Fläche, d. h. die Kurven, welche die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Fläche bilden. Dieselben wurden schon im Abschnitt I, § 10 bei den abwickelbaren Flächen erwähnt, und es wurde dort eine charakteristische Eigenschaft dieser Kurven hervorgehoben, nämlich daß ihre Schmiegungsebene stets auf der Tangentialebene der Fläche senkrecht steht, also die Flächennormale enthält. Dieser Satz, der dort nur für den speziellen Fall der abwickelbaren Flächen bewiesen wurde, soll jetzt allgemein bewiesen werden.

Es seien (s. Fig. 15) APB drei aufeinanderfolgende Punkte einer geodätischen Linie, und zwar sei $AP = BP$. Aus der Definition der geodätischen Linie folgt nun unmittelbar, daß von allen gleichschenkligen Dreiecken, deren Basis

AB ist und deren Spitze auf der Fläche liegt, das Dreieck APB die kleinsten Schenkel und darum auch die kleinste Höhe haben muß. Diese Dreiecke haben aber ihre Spitze alle auf einer Kurve CPE der Fläche, die sich als Schnitt der Mittellotebene zu AB und der Fläche ergibt. Diese Mittellotebene schneide AB in D, so daß also PD die Höhe des Dreiecks APB ist. Nach dem oben Gesagten muß nun P derjenige Punkt der Kurve CPE sein, der von D die kleinste Entfernung hat; d. h. PD steht auf der Tangente dieser Kurve senkrecht. PD geht nun aber auch durch den Mittelpunkt des dem Dreieck APB umbeschriebenen Kreises. In der Grenze ist daher PD Hauptnormale für die geodätische Linie APB im Punkt P (vgl. § 3 und 4) und steht daher auch auf der Tangente dieser Kurve in P senkrecht. Die Hauptnormale PD der geodätischen Linie steht also senkrecht auf zwei Flächentangenten durch P, und ist daher die Flächennormale für P. Die Schmiegungsebene APB der geodätischen Linie enthält also die Flächennormale PD. Wir haben also den

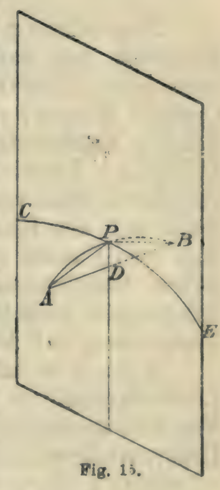


Fig. 15.

Satz 1. In jedem Punkt P einer geodätischen Linie geht die Schmiegungsebene in P durch die Flächennormale in P.

Oder

Die Hauptnormale einer geodätischen Linie fällt in jedem Punkt mit der Flächennormalen zusammen.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die Differentialgleichung der geodätischen Linien leicht aufstellen. Die Gleichungen der Flächennormalen sind nach § 15, (23)

$$(1)\qquad (X-x):(Y-y):(Z-z)=a:b:c.$$

Die Gleichung der Schmiegungsebene einer Kurve ist nach § 3, (6)

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} X-x & dx & d^2x \\ Y-y & dy & d^2y \\ Z-z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bedingung dafür, daß die Normale in der Schmiegungsebene liegen soll, erhalten wir, wenn wir in (2) für $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ die proportionalen Werte a, b, c in (2) einsetzen. Bezeichnen wir die linke Seite der resultierenden Gleichung mit N, so haben wir als Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$(3) \qquad N = \begin{vmatrix} a & dx & d^2x \\ b & dy & d^2y \\ c & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Bemerkung. Die Bedingung (3), welche der analytische Ausdruck des Satzes 1 ist, ist notwendig. Ob dieselbe auch hinreichend ist, bleibt noch unentschieden. Mit anderen Worten: es ist nicht gesagt, daß jede Linie auf der Fläche, welche der Differentialgleichung (3) genügt, zwei beliebige Punkte der Fläche auf dem kürzesten Wege auf der Fläche verbindet. Nehmen wir z. B. einen Großkreis auf der Kugel, für den sicher der Satz 1. zutrifft, und zwei Punkte auf demselben, die nicht Endpunkte desselben Durchmessers sind, so ist allerdings der kleinere Kreisbogen zwischen den beiden Punkten ihre kürzeste Verbindung auf der Fläche, der größere aber nicht.

Analytisch läßt sich die Frage, ob bei einer geodätischen Linie tatsächlich ein Minimum vorliegt, mit Hilfe der Variationsrechnung erledigen, die auch die Aufstellung der Differentialgleichung (3) ohne Benutzung des Satzes 1 ermöglicht.*) Wir gehen jedoch hierauf nicht weiter ein, sondern nennen, die ursprüngliche Definition erweiternd, jede Kurve auf der Fläche eine geodätische Linie, deren Schmiegungsebene stets die Flächennormale enthält.

Die Differentialgleichung (3) ist von der zweiten Ordnung, ihr Integral enthält also zwei willkürliche Konstanten; diese sind bestimmt, sobald ein Punkt der

*) Ist PLQ die Länge der geodätischen Linie zwischen den Flächenpunkten P und Q, PL_1Q die Länge einer ihr unendlich benachbarten Linie der Fläche mit denselben Endpunkten, so gibt die Variationsrechnung $PLQ = PL_1Q + \varepsilon$, wo ε unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Das Vorzeichen dieser letzteren Größe (zweite Variation) entscheidet darüber, ob ein Minimum vorliegt oder nicht.

geodätischen Linie und ihre Richtung in diesem Punkt gegeben ist. Durch jeden Flächenpunkt gehen also unendlich viele geodätischen Linien.

Man kann der Differentialgleichung der geodätischen Linie noch eine etwas andere Form geben, wenn man davon ausgeht, daß die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt. Die Richtungskosinus der letzteren sind proportional mit F_1, F_2, F_3; die der ersteren nach § 4, (4) (wenn als Parameter die Bogenlänge s dient) mit $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$. Ist nun λ ein Proportionalitätsfaktor, so folgt

$$(3\text{a}) \qquad \frac{d^2x}{ds^2}=\lambda F_1, \quad \frac{d^2y}{ds^2}=\lambda F_2, \quad \frac{d^2z}{ds^2}=\lambda F_3.$$

Man sieht unmittelbar, daß mit (3a) auch (3) befriedigt ist.

Historisch seien noch zwei aus Sätzen der Mechanik folgende Eigenschaften der geodätischen Linien angeführt, nämlich:

Satz 2. Bewegt sich ein Punkt, auf den keine äußeren Kräfte wirken, auf einer Fläche, so beschreibt er eine geodätische Linie.

Ferner:

Satz 3. Ein Fadenstück, das auf einer Fläche ohne Reibung beweglich ist, legt sich, straff angespannt, in Form einer geodätischen Linie auf die Fläche.

Wir leiten hier für späteren Gebrauch noch eine Beziehung zwischen den früher (§ 20) definierten Differentialformen L, M, ds^2 und der in diesem Paragraphen eingeführten Determinante N ab. Multipliziert man nämlich M und N, so folgt

$$MN=\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & dx & d^2x \\ a & dy & d^2y \\ a & dz & d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma a^2 & \Sigma ada & \Sigma adx \\ \Sigma adx & \Sigma dadx & \Sigma dx^2 \\ \Sigma ad^2x & \Sigma dad^2x & \Sigma dxd^2x \end{vmatrix}.$$

Nun ist nach § 20

$$\Sigma a^2=1,\ \Sigma ada=0,\ \Sigma adx=0\ \ \Sigma dadx=-L,$$
$$\Sigma ad^2x=L,$$

und nach § 15, (8) $\Sigma dx d^2x = ds d^2s$. Wir erhalten also

(4) $$MN = -ds(L d^2s + ds \Sigma da d^2x).]$$

Beispiel. Die geodätischen Linien der Rotationsflächen.

Die Gleichung der Rotationsfläche sei

$$z - f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

und die Ableitung von f sei mit f' bezeichnet. Dann sind nach (3a) die Differentialgleichungen der geodätischen Linien

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{-xf'}{\sqrt{x^2+y^2}} : \frac{-yf'}{\sqrt{x^2+y^2}} : 1.$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2x}{ds^2} y - \frac{d^2y}{ds^2} x = 0.$$

Dies ist nun die Differentialgleichung der Projektionen der geodätischen Linien auf die xy-Ebene. Sie läßt sich auch in der Form schreiben

(5) $$\frac{d}{ds}(xdy - ydx) = 0.$$

Führt man Polarkoordinaten ein, setzt also

(6) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so folgt aus (5) durch eine einfache Rechnung

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0,$$

oder integriert

(7) $$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{konst.} = r_0.$$

Diese Gleichung gestattet nach Clairaut*) eine einfache geometrische Deutung. Betrachten wir (vgl. Fig. 16) ein

*) Clairaut, „Déterminations géometriques de la perpendiculaire à la méridienne" etc. Mém. de l'Acad. de Paris pour l'année 1733. Paris 1735.

Element PP' der geodätischen Linie, und ziehen durch P den Parallelkreis (Mittelpunkt O) und durch P' den Meridian, der den Parellelkreis in Q treffen möge, so ist PQP' ein unendlich kleines, bei Q rechtwinkliges Dreieck. In demselben ist

$$PQ = r d\varphi, \quad PP' = ds,$$

also

$$\cos QPP' = \frac{r\,d\varphi}{ds}$$

Der Winkel QPP' ist aber der Winkel, den die geodätische Linie mit dem Parallelkreis des Punktes P bildet, und der mit α bezeichnet sei (vgl. Fig. 16). Es ist also

$$\cos QPP' = \cos\alpha = \frac{r\,d\varphi}{ds}$$

daraus folgt nach (7)

$$(8) \qquad r\cos\alpha = r_0$$

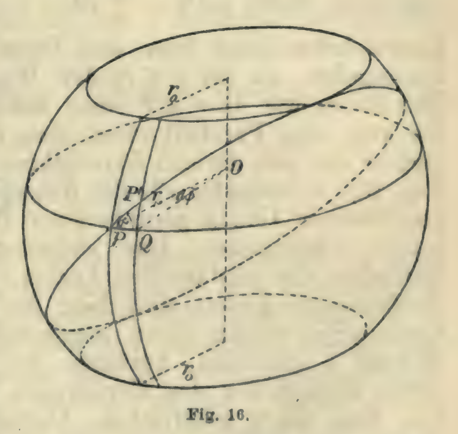


Fig. 16.

Gleichung (8) enthält nun den

Satz 4 (von Clairaut*). Auf einer Rotationsfläche ist für jeden Punkt einer geodätischen Linie das Produkt aus dem Radius des Parallelkreises und dem Kosinus des Neigungswinkels der geodätischen Linie gegen diesen Parallelkreis konstant.

Hieraus ergeben sich einige Folgerungen über den Verlauf der geodätischen Linien auf Rotationsflächen. Wächst r, so muß $\cos\alpha$ abnehmen, α also wachsen, d. h. je größer in dem Gebiet, wo wir den Verlauf der geodätischen

*) Siehe vorhergehende Note auf Seite 136.

Linie betrachten, die Parallelkreisradien sind, um so größer ist der Neigungswinkel der Linie gegen die entsprechenden Parallelkreise, und umgekehrt; je kleiner r wird, desto größer muß $\cos\alpha$ werden, und desto mehr nähert sich α dem Wert 0, diese Grenze wird erreicht, wenn $\cos\alpha = 1$ und $r = r_0$. Für diesen Parallelkreis ist der Winkel α, den die geodätische Linie mit dem Parallelkreis bildet, $= 0$, d. h. die geodätische Linie berührt diesen Parallelkreis. Es gehört also zu einer geodätischen Linie, die in einem Flächenpunkt mit dem Parallelkreis von Radius r einen Winkel α bildet, ein Parallelkreis mit dem Radius $r_0 = r\cos\alpha$, den sie berührt (d. h. sofern auf der Fläche ein solcher überhaupt existiert). Umgekehrt gibt es zu jedem Parallelkreis von Radius r_0 unendlich viele geodätischen Linien, die ihn berühren, und irgend einen andern Parallelkreis vom Radius r $(r > r_0)$ alle unter denselben Winkel α schneiden, wobei $\cos\alpha = \frac{r_0}{r}$ ist. Von diesen geodätischen Linien kann keine über den Parallelkreis vom Radius r_0 hinausgehen, da für $r < r_0$ der Winkel α imaginär wird. Betrachten wir also auf einer Rotationsfläche eine Zone, die von zwei Parallelkreisen vom Radius r_0 begrenzt ist, und in der alle übrigen Parallelkreisradien $> r_0$ sind (vgl. Fig. 16), so verlaufen alle der Konstanten r_0 entsprechenden geodätischen Linien ganz in jener Zone und berühren die beiden Grenzkreise. Das einfachste Beispiel für dieses Verhalten der geodätischen Linien bildet die Kugel. Die geodätischen Linien sind hier die Großkreise, und alle Großkreise, welche einen gegebenen unter dem gleichen Winkel α schneiden, berühren die beiden Parallelkreise, deren Ebenen der des Großkreises parallel sind, und die von ihm einen sphärischen Abstand $= \alpha$ haben. Jeder andere Parallelkreis wird von allen diesen Großkreisen unter dem gleichen Winkel, der aber von α verschieden ist, geschnitten.

Aus (7) erhält man durch eine zweite Integration die Gleichung der geodätischen Linie selbst. Die Gleichung der Fläche war

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

oder in Polarkoordinaten [vgl. (6)]

$$z = f(r). \tag{9}$$

Es ist nun:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + f'(r)^2 dr^2$$
$$= r^2 d\varphi^2 + [1 + f'(r)^2]\, dr^2.$$

Aus (7) folgt

$$ds^2 = \frac{r^4 d\varphi^2}{r_0^2},$$

also eingesetzt

$$\frac{r^2 d\varphi^2}{r_0^2}(r^2 - r_0^2) = [1 + f'(r)^2]\, dr^2,$$

und

$$\varphi = \int \frac{r_0}{r} \sqrt{\frac{1 + f'(r)^2}{r^2 - r_0^2}}\, dr + C. \tag{10}$$

Damit ist φ als Funktion von r bestimmt, (10) ist also die Gleichung der geodätischen Linie. Setzt man aus (7) den Wert von $d\varphi = \frac{r_0\, ds}{r^2}$ ein, so ergibt sich für den Bogen s der geodätischen Linie

$$s = \int r \sqrt{\frac{1 + f'(r)^2}{r^2 - r_0^2}}\, dr + C_1. \tag{11}$$

Um das Verhalten der geodätischen Linie an dem Parallelkreis $r = r_0$ kennen zu lernen, ist eine Untersuchung der Integrale (10) und (11) in dem singulären Punkt $r = r_0$ erforderlich. Man findet nach den bekannten Regeln, daß die Integrale im allgemeinen auch für $r = r_0$ einen endlichen Wert besitzen, ausgenommen den Fall, daß $f'(r)$ für $r = r_0$ unendlich wird, d. h. wenn die Meridiantangente für $z = z_0$ parallel zur z-Achse ist, also der Parallelkreis r_0 selbst eine geodätische Linie ist. In diesem Fall nähert sich die geodätische Linie in unendlich vielen Windungen ($\varphi = \infty$, $s = \infty$) dem Parallelkreis $r = r_0$ asymptotisch.

Als Beispiel hierfür kann die Rotationsfläche der Kettenlinie*), das sogenannte Katenoïd, dienen. Für diese

*) Vgl. S. S. XI. W. Fr. Meyer, Integralrechnung. § 7, IV, S. 85.

Fläche lautet die Gleichung der Meridiankurve

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\frac{z}{r_0}} + e^{-\frac{z}{r_0}}\right), \tag{12}$$

wobei r_0 der Radius des kleinsten Parallelkreises (Kehlkreises ist. Es ist nun

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{r_0}} - e^{-\frac{z}{r_0}}\right). \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt leicht

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{r^2}{r_0^2} - 1 = \frac{r^2 - r_0^2}{r_0^2},$$

also

$$f'(r) = \frac{dz}{dr} = \frac{r_0}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}$$

und

$$1 + f'(r)^2 = \frac{r^2}{r^2 - r_0^2}.$$

Hiernach erhält (10) in unserem Fall die Form

$$\varphi = \int \frac{r_0\, dr}{r^2 - r_0^2} + C$$

oder integriert

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\, lg \frac{r - r_0}{r + r_0} + C. \tag{14}$$

Gleichung (11) ergibt

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{r^2\, dr}{r^2 - r_0^2} + C_1, \\ &= r + \frac{r_0}{2}\, lg \frac{r - r_0}{r + r_0} + C_1. \end{aligned} \tag{15}$$

Gibt man in (14) der Integrationskonstanten C einen bestimmten Wert, etwa φ_0, so stellt (14) die Projektion einer geodätischen Linie auf die xy-Ebene in Polarkoordinaten (r, φ) dar. Einer Änderung der Konstanten φ_0 entspricht eine Drehung um die z-Achse. Wird $r = r_0$,

so erhält die rechte Seite den Wert $-\infty$, also muß, damit $r = r_0$ wird, φ einen unendlich großen negativen Wert haben, d. h. die Kurve nähert sich dem Kehlkreis $r = r_0$ in unendlich vielen Windungen asymptotisch. Dies ist auch aus (15) ersichtlich, insofern die Bogenlänge s der Kurve für $r = r_0$ ebenfalls unendlich groß wird.

§ 26. Die geodätischen Linien der Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung.

Im vorigen Paragraphen wurde die kürzeste Linie, welche zwei Punkte auf einer Fläche verbindet, als eine geodätische Linie bezeichnet. Für die Ebene sind die geodätischen Linien lauter Geraden; es entsprechen also die geodätischen Linien einer Fläche in gewissem Sinne den Geraden der Ebene. Besonders anschaulich tritt dies bei den Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung zu Tage; es besteht nämlich eine vollständige Analogie zwischen den Brennstrahlen, die einen Punkt eines Kegelschnitts mit den Brennpunkten verbinden, und den geodätischen Linien auf einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, welche einen Punkt einer Krümmungslinie mit zwei Kreispunkten der Fläche verbinden, derart, daß die fundamentalen Sätze, die für den ersten Fall gelten, sich direkt auf den zweiten übertragen lassen.

Ehe wir auf die geodätischen Linien durch die Kreispunkte näher eingehen, betrachten wir zunächst allgemein die geodätischen Linien der Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung.

Um die Differentialgleichung derselben aufzustellen, benutzen wir § 25, Gl. (4) und setzen die rechte Seite $= 0$; wir erhalten so

$$L\,d^2 s + ds \sum da\, d^2 x = 0. \tag{1}$$

Nach § 25, (4) ist dies zugleich die Differentialgleichung der Krümmungslinien; die folgenden Entwicklungen gelten daher zunächst für beide Arten von Linien. Wir führen nun in (1) statt a, b, c die partiellen Ableitungen von $F(x, y, z)$ nach x, y, z ein.

Aus § 21, (13)--(16) folgt

$$(2) \qquad L = -\sum da\, dx = -V \sum dF_1\, dx.$$

Ferner

$$(3) \qquad \sum da\, d^2x = V \sum dF_1\, d^2x + V \sum F_1\, d^2x.$$

Differenziert man § 21, (15), so folgt

$$(4) \qquad \sum F_1\, d^2x + \sum dF_1\, dx = 0.$$

Also ist

$$(5) \qquad \sum da\, d^2x = V \sum dF_1\, d^2x - dV \sum dF_1\, dx.$$

Die Differentialgleichung (1) der geodätischen Linien läßt sich nun nach (2) und (5) in die Form bringen

$$-d^2s\, V \sum dF_1\, dx + ds\,(V \sum dF_1\, d^2x - dV \sum dF_1\, dx) = 0$$

oder nach Division mit $\frac{1}{2} V ds \sum dF_1\, dx$

$$(6) \qquad \frac{2 \sum dF_1\, d^2x}{\sum dF_1\, dx} - \frac{2\,dV}{V} - \frac{2\,d^2s}{ds} = 0.$$

Diese Gleichung gilt für jede Fläche $F(x,y,z) = 0$. Für eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung gestattet sie sofort eine erste Integration; es ist nämlich für diesen Fall auch im ersten Glied der Zähler das Differential des Nenners, wie sich leicht zeigen läßt. Die Gleichung einer solchen Fläche sei

$$(7) \qquad F(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0$$

(wo die Halbachsen a, b, c auch imaginär sein können).

Es ist dann

$$F_1 = \frac{x}{a^2}, \quad F_2 = \frac{y}{b^2}, \quad F_3 = \frac{z}{c^2},$$

$$(8) \qquad \frac{1}{V^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

$$dF_1 = \frac{dx}{a^2}, \quad dF_2 = \frac{dy}{b^2}, \quad dF_3 = \frac{dz}{c^2}.$$

Daraus folgt

$$2\sum dF_1 d^2x = 2\sum\frac{dx\,d^2x}{a^2} = d\sum\frac{dx^2}{a^2} = d\sum dF_1 dx.$$

Nun folgt aus (6) durch Integration

$$lg\sum dF_1\,dx - lg V^2 - lg\,d^2s = lg\,C,$$

oder
$$\frac{\sum dF_1\,dx}{V^2} = C ds^2,$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Durch Einführung der Werte aus (8) folgt

$$(9)\quad \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = C.$$

Dieses erste Integral erlaubt eine wichtige geometrische Deutung, die nach der zu Anfang gemachten Bemerkung sowohl für Krümmungslinien wie für geodätische Linien gilt. Zunächst ist V der Abstand der Tangentialebene des Punktes x, y, z vom Mittelpunkt der Fläche*). Wir setzen ferner

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{1}{D^2}.$$

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind die Richtungskosinus der Kurventangente im Punkt x, y, z, und D ist der Radius der Fläche, welcher dieser Tangente parallel läuft**). Gleichung (9) läßt sich also kurz

$$(9a)\qquad V.D = \text{konst.}$$

schreiben. Wir haben also den

Satz 1 (von Joachimsthal***). *Bei jeder geodätischen Linie (und Krümmungslinie) auf einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung ist das Produkt aus der Entfernung des Mittelpunktes von der Tangen-*

---

*) Vgl. S. S. IX. Simon, Analytische Geometrie des Raumes I, § 3, Aufg. 7.

**) Vgl. S. S. XXV. Simon, Analytische Geometrie des Raumes II, § 21, Aufg. 19.

***) F. Joachimsthal, „Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus". Crelle's Journal, Bd. 26, S. 155 ff.

tialebene in einem Punkt der Linie, und aus der Länge des Radius, der parallel läuft zur Tangente der Linie in demselben Punkt, konstant.

Die Integration der Gleichung (9) läßt sich, wie Jacobi*) gezeigt hat, auf Quadraturen zurückführen, wenn elliptische Koordinaten eingeführt werden. Wir führen die Rechnung für das Ellipsoid durch. Die Gleichung desselben in elliptischen Koordinaten (μ, ν) erhalten wir, wenn wir in § 23, (6) $\lambda = 0$ setzen. Aus § 23, (8) folgt dann

$$\frac{1}{V^2} = \sum \frac{x^2}{a^4} = \frac{\mu\nu}{a^2 b^2 c^2} \tag{10}$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\begin{aligned} M &= (a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu), \\ N &= (a^2 + \nu)(b^2 + \nu)(c^2 + \nu), \end{aligned} \tag{11}$$

dann folgt aus § 23, (12), da $d\lambda = 0$ ist,

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\mu - \nu)\left(\frac{\mu\, d\mu^2}{M} - \frac{\nu\, d\nu^2}{N}\right). \tag{12}$$

Bildet man endlich aus § 23, (11) den Ausdruck $\sum \frac{dx^2}{a^2}$ für $\lambda = 0$, $d\lambda = 0$, so ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} 4\sum \frac{dx^2}{a^2} &= d\mu^2 \sum \frac{x^2}{a^2 (a^2 + \mu)^2} + d\nu^2 \sum \frac{x^2}{a^2 (a^2 + \nu)^2} \\ &\quad + 2\, d\mu\, d\nu \sum \frac{x^2}{a^2 (a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Nun folgt aus § 23, (9) und (9a) durch zyklische Vertauschung für $\lambda = 0$

$$\sum \frac{x^2}{a^2 (a^2 + \nu)^2} = \frac{\mu - \nu}{N}, \quad \sum \frac{x^2}{a^2 (a^2 + \mu)^2} = -\frac{\mu - \nu}{M}.$$

Ferner verschwindet nach § 23, (10) für $\lambda = 0$ das letzte Glied in (13); es ist also

$$\sum \frac{dx^2}{a^2} = \frac{1}{4}(\nu - \mu)\left(\frac{d\mu^2}{M} - \frac{d\nu^2}{N}\right). \tag{14}$$

---

*) C. G. J. Jacobi, „Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid etc.“, Crelles Journal, Bd. 19, S. 309 ff.

Aus (9), (10), (12) und (14) folgt nun

$$\frac{\mu\nu}{4a^2b^2c^2}(\nu-\mu)\left(\frac{d\mu^2}{M}-\frac{d\nu^2}{N}\right)=\frac{C}{4}(\mu-\nu)\left(\frac{\mu\,d\mu^2}{M}-\frac{\nu\,d\nu^2}{N}\right).$$

Ersetzt man $a^2b^2c^2C$ durch eine neue Konstante c_1, so folgt schließlich

$$(15) \qquad d\mu\sqrt{\frac{\mu}{M(\mu+c_1)}}=\pm\, d\nu\sqrt{\frac{\nu}{N(\nu+c_1)}}.$$

Hier sind nun die Variabeln μ und ν getrennt; durch eine Integration, welche auf hyperelliptische Integrale führt, erhält man die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid.

Anmerkung. Eigentlich sollte man, da ja (9) für geodätische wie für Krümmungslinien gilt, in (15) als Integral auch die Krümmungslinien erwarten; d. h. (15) sollte für $\mu=$ konst. und $\nu=$ konst. befriedigt sein. Dies ist aber auch der Fall, und zwar sind die Krümmungslinien singuläre Integrale. In der Tat ist (15) für $\mu=-c_1$, $d\mu=0$ und ebenso für $\nu=-c_1$, $d\nu=0$ erfüllt. Weiter unten (Satz 2) wird sich ergeben, daß alle geodätischen Linien mit derselben Konstanten c_1 dieselbe Krümmungslinie berühren: die Krümmungslinien erscheinen so als Enveloppen der geodätischen Linien.

Um das durch (12) und (15) bestimmte Linienelement der geodätischen Linien in eine geeignete Form zu bringen, bezeichnen wir die linke (und damit auch die rechte) Seite von (15) mit ρ. Drückt man dann $\frac{\mu d\mu^2}{M}$ und $\frac{\nu d\nu^2}{N}$ durch ρ aus und setzt die gefundenen Werte in (12) ein, so folgt

$$2\,ds=\rho(\mu-\nu),$$

wofür man auch schreiben kann

$$2\,ds=\rho(\mu+c_1)-\rho(\nu+c_1).$$

Setzt man nun für ρ das eine Mal die linke, das andre Mal die rechte Seite von (15) ein, so erhält man für das Linienelement der geodätischen Linien

$$(16) \qquad 2\,ds=d\mu\sqrt{\frac{\mu(\mu+c_1)}{M}}\mp d\nu\sqrt{\frac{\nu(\nu+c_1)}{N}}.$$

Dabei entsprechen sich die Zeichen in (15) und (16). Damit (16) einen reellen Wert für ds gibt, muß die willkür-

liche Konstante c_1 zwischen bestimmten Grenzen liegen. Da μ und ν nach § 23, S. 125 stets negative Größen sind, und da μ zwischen $-c^2$ und $-b^2$, ν zwischen $-b^2$ und $-a^2$ liegt, so ist nach (11) M stets negativ, N stets positiv. Aus (16) folgt daher, daß c_1 eine positive Größe und zwischen den absoluten Werten von μ und ν liegen muß, d. h. es muß

$$a^2 \geqq c_1 \geqq c^2 \tag{17}$$

sein oder $-c_1$ muß im Intervall von μ oder dem von ν liegen.

Die Konstante c_1 hat eine einfache geometrische Bedeutung, die sich ergibt, wenn wir die Bedingung dafür suchen, daß eine geodätische Linie die Krümmungslinie $\mu =$ konst. berührt. In dem Berührungspunkte muß offenbar die Differentialgleichung (15) sich auf $d\mu = 0$ reduzieren, d. h. es muß $\mu + c_1 = 0$ sein.

Analoges gilt für die Berührung einer Krümmungslinie $\nu =$ konst. Also

Satz 2. Alle geodätischen Linien (15) mit demselben c_1 berühren ein und dieselbe Krümmungslinie mit der Gleichung $\mu + c_1 = 0$ (bezw. $\nu + c_1 = 0$, wenn $-c_1$ im Intervall von ν liegt).

Da nun jede Krümmungslinie aus zwei getrennten geschlossenen Kurven besteht, wie sich aus §§ 23 und 24 ergibt, so ist jede geodätische Linie auf die von den beiden Zweigen der Krümmungslinie umschlossene Ellipsoidzone beschränkt. Auf dieser Zone winden sich die geodätischen Linien unendlich oft herum, ohne sich im allgemeinen zu schließen. Dabei berühren sie stets beim Rückgang den betreffenden Ast der Krümmungslinie.

Von besonderem Interesse sind die geodätischen Linien durch die Kreispunkte des Ellipsoids. Die Koordinaten derselben sind (vgl. § 28, Aufgabe 29)

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = \frac{c^2(b^2 - c^2)}{a^2 - c^2} \tag{18}$$

oder nach § 23, (6) für $\lambda = 0$

$$\mu = \nu = -b^2.$$

Nach dem, was oben über die Konstante c_1 gesagt wurde, haben wir also in (15) und (16) $c_1 = b^2$ zu setzen

und erhalten als Differentialgleichung der geodätischen Linien durch die Kreispunkte

$$(19)\quad \frac{d\mu}{b^2+\mu}\sqrt{\frac{\mu}{(a^2+\mu)(c^2+\mu)}} = \pm \frac{d\nu}{(b^2+\nu)}\sqrt{\frac{\nu}{(a^2+\nu)(c^2+\nu)}}.$$

Für das Bogenelemeut dieser Linien folgt aus (16)

$$(20)\quad 2\,ds = d\mu\sqrt{\frac{\mu}{(a^2+\mu)(c^2+\mu)}} \mp d\nu\sqrt{\frac{\nu}{(a^2+\nu)(c^2+\nu)}}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen lassen sich einige wichtige Folgerungen ziehen. Zunächst folgt aus (19), daß durch jeden Punkt M (μ, ν) zwei geodätische Linien gehen, von denen jede nach einem Kreispunkt führt. Die beiden Kreispunkte seien K_1 und K_2 (vgl. Fig. 17), die beiden zugehörigen Verhältnisse von $d\mu$ und $d\nu$ seien $d\mu_1 : d\nu_1$ und $d\mu_2 : d\nu_2$. Es folgt nun aus (19)

$$(21)\quad \frac{d\mu_1}{d\nu_1} = -\frac{d\mu_2}{d\nu_2}.$$

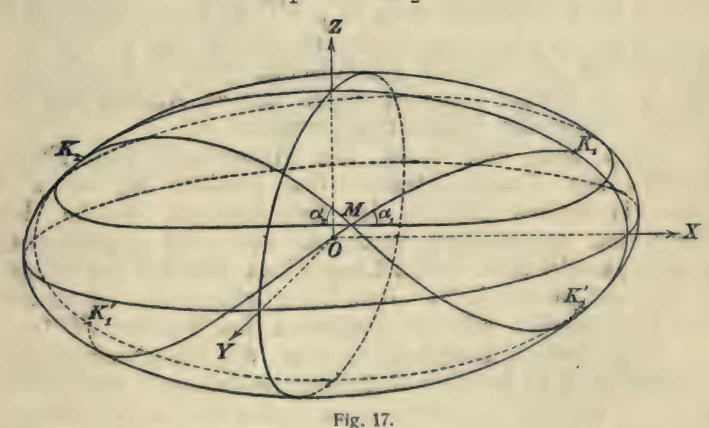


Fig. 17.

Für diese beiden geodätischen Linien gilt nun der Satz 3 (von Roberts).* Die geodätischen Linien,

*) „Liouvilles Journal" Bd. 11 (1846), p. 2. Roberts beweist hier den allgemeineren Satz: „Begegnen sich zwei dieselbe Krümmungslinie berührenden geodätischen Linien in einem Punkt (μ, ν), so bilden sie mit den Krümmungslinien durch diesen Punkt gleiche Winkel."

welche einen Punkt des Ellipsoids mit zwei Kreispunkten desselben verbinden, machen mit den Krümmungslinien durch diesen Punkt gleiche Winkel.

Der Beweis ergibt sich am einfachsten aus (9a).

Zunächst hat nämlich die dort auftretende Größe D für die beiden, durch M gehenden geodätischen Linien denselben Wert. Denn für die beiden Kreispunkte K_1 und K_2 ist ja V (d. h. der Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkt, vgl. S. 143) gleich groß. D ist aber in diesem Fall nach der S. 143 angegebenen geometrischen Bedeutung der Radius eines Kreisschnitts, hat also für alle von einem Kreispunkt ausgehenden Fortschreitungsrichtungen denselben Wert. Da nun nach Satz 1 das Produkt VD längs einer geodätischen Linie konstant ist, so hat VD für alle geodätischen Linien, welche durch die Kreispunkte gehen, in allen Punkten denselben Wert. Schneiden sich nun zwei solche Linien, z. B. in M, so hat V hier überhaupt nur einen Wert, folglich müssen, da ja VD für beide geodätischen Linien gleich ist, auch die beiden Werte von D, die den Richtungen der beiden geodätischen Linien entsprechen, gleich sein, womit zunächst einmal die zu Anfang des Beweises aufgestellte Behauptung erwiesen ist.

Legt man nun durch den Mittelpunkt eine Ebene parallel zur Tangentialebene des Punktes M, so sind also die beiden Radien der Schnittellipse, welche den Tangenten der beiden durch M gehenden geodätischen Linien parallel sind, gleich lang, bilden also mit den Hauptachsen gleiche Winkel*). Jene Schnittellipse aber ist ähnlich und liegt ähnlich mit der Indikatrix des Punktes M**).

Den beiden Hauptachsen sind die Hauptachsen der Indikatrix, d. h. die Hauptkrümmungsrichtungen, den beiden gleichen Radien nach dem oben Gesagten die Richtungen der beiden von M aus nach K_1 und K_2 gehenden geodätischen Linien parallel, folglich machen diese mit den Hauptkrümmungsrichtungen gleiche Winkel.

---

*) Vgl. S. S. VIII. Simon, Anal. Geom. d. Ebene, § 44, S. 238.

**) Vgl. S. S. XXV. Simon, Anal. Geom. d. Raumes II, § 17, Aufg. 2, S. 99.

Verbindet man nun M auch mit den beiden anderen Kreispunkten K'_1 und K_2' (s. Fig. 17), so folgt aus dem bewiesenen Satz, daß MK_1' die geodätische Verlängerung von MK_1 und ebenso MK_2' die von MK_2 ist. Also

Satz 4. Zieht man alle möglichen geodätischen Linien durch einen Kreispunkt, so münden diese alle in den diametral gegenüberliegenden.

Man kann also zwei solche Kreispunkte (ähnlich wie die Gegenpunkte einer Kugel) durch unendlich viele geodätischen Linien verbinden. Für jede derselben hat die Bogenlänge einen Minimalwert; daraus folgt (nach einem zuerst von Waring*) aufgestellten Prinzip), daß die Bogenlängen alle unter sich gleich sind. Denn da jede einen Minimalwert hat, kann eine bestimmte einzelne jedenfalls nicht grösser sein, als eine ihr unmittelbar benachbarte, aber auch nicht kleiner, denn sonst hätte ja die letztere keinen Minimalwert; sie müssen also alle gleich sein.

Satz 5. Alle geodätischen Linien von einem Kreispunkt zum diametral gegenüberliegenden sind gleich lang.

Wir bestimmen endlich die Bogenlängen MK_1 und MK_2 der beiden geodätischen Linien von M nach K_1 und K_2, indem wir die beiden aus (20) sich ergebenden Werte von ds integrieren. Die unteren Grenzen sind: $\mu = \mu$, $\nu = \nu$, die oberen $\mu = -b^2$, $\nu = -b^2$. Wir erhalten so

$$MK_1 = \tfrac{1}{2}\int_{\mu}^{-b^2} d\mu \sqrt{\frac{\mu}{(a^2+\mu)(c^2+\mu)}} - \tfrac{1}{2}\int_{\nu}^{-b^2} d\nu \sqrt{\frac{\nu}{(a^2+\nu)(c^2+\nu)}};$$

$$MK_2 = \tfrac{1}{2}\int_{\mu}^{-b^2} d\mu \sqrt{\frac{\mu}{(a^2+\mu)(c^2+\mu)}} + \tfrac{1}{2}\int_{\nu}^{-b^2} d\nu \sqrt{\frac{\nu}{(a^2+\nu)(c^2+\nu)}}.$$

Durch Addition folgt

$$(22) \qquad MK_1 + MK_2 = \int_{\mu}^{-b^2} d\mu \sqrt{\frac{\mu}{(a^2+\mu)(c^2+\mu)}}.$$

---

*) Waring. Proprietates algebraicarum curvarum (Cambridge 1762). Cap. IV. Schluß.

Diese Gleichung zeigt, daß die Summe der beiden Entfernungen nur von μ abhängt, d. h. längs der Krümmungslinie $\mu =$ konst. sich nicht ändert. Bezeichnet also M' einen zweiten Punkt dieser Krümmungslinie, so ist

$$MK_1 + MK_2 = M'K_1 + M'K_2.$$

Nach Satz 5 ist aber auch

$$MK_1 + MK_1' = M'K_1 + M'K_1'.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt

$$MK_2 - MK_1' = M'K_2 - M'K_1',$$

d. h. für alle Punkte der obigen Krümmungslinie ist die Differenz der Entfernungen von den beiden Kreispunkten K_2 und K_1' konstant. Analog läßt sich der Beweis für eine Krümmungslinie $\nu =$ konst. führen. Wir haben also

Satz 6. Für alle Punkte derselben Krümmungslinie ist die Summe bezw. Differenz der geodätischen Entfernungen von zwei Kreispunkten konstant, je nachdem die beiden Kreispunkte von der Krümmungslinie eingeschlossen oder getrennt werden.

Die Sätze 3 und 6 zeigen die vollständige Analogie der Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids mit den konfokalen Kegelschnitten der Ebene, wobei den Brennpunkten die Kreispunkte, den Verbindungslinien der Brennpunkte mit einem Kurvenpunkte die geodätischen Linien durch die Kreispunkte entsprechen, welche nach demselben Punkte des Ellipsoids gehen. Man bezeichnet daher auch die Krümmungslinien des Ellipsoids als geodätische Ellipsen und Hyperbeln. Diese Analogie läßt sich noch weiterführen; z. B. schneiden sich die Krümmungslinien des Ellipsoids nach §§ 23 und 24 überall rechtwinklig, wie die konfokalen Kegelschnitte. Insbesondere lassen sich nach Satz 6 die Krümmungslinien des Ellipsoids mit Hilfe eines in den Kreispunkten befestigten, über die Fläche gespannten Fadens in ganz derselben Weise mechanisch konstruieren, wie die Ellipse in der Ebene.

Wir betrachten nun noch die geodätischen Linien des Ellipsoids, die **nicht** durch die Kreispunkte gehen. Über ihren Verlauf erhält man näheren Aufschluß durch folgenden

Satz 7 (von Chasles*).) Berühren alle Tangenten einer auf einem Ellipsoid gezogenen Kurve ein konfokales Hyperboloid, so ist diese Kurve eine geodätische Linie des Ellipsoids.

Beweis: Die Gleichung des Ellipsoids sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{23}$$

die des konfokalen Hyperboloids

$$\frac{x'^2}{a^2+\lambda}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda}=1. \tag{24}$$

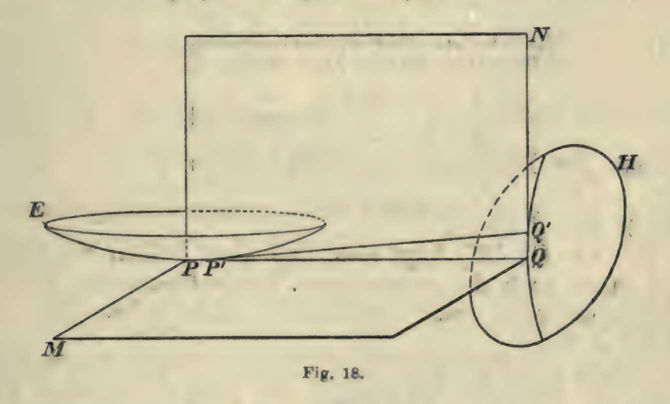


Fig. 18.

Es sei nun (vgl. Fig. 18) $P(x_1, y_1, z_1)$ ein Punkt der Kurve auf dem Ellipsoid**), M seine Tangentialebene, $Q(x_1', y_1', z_1')$ der Punkt, wo seine Tangente (nach Voraussetzung) das Hyperboloid berührt, N dessen Tangentialebene. Die Gleichungen der beiden Tangentialebenen in P bzw. in Q sind dann, für M:

$$\frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}+\frac{z z_1}{c^2}=1, \tag{25}$$

---

*) „Liouvilles Journal" Bd. 11 (1846), p. 11.

**) In der (schematischen) Fig. 18 ist ein Stück des Ellipsoids durch E, ein solches des Hyperboloids durch H angedeutet.

und für N:

$$\frac{x x_1'}{a^2+\lambda} + \frac{y y_1'}{b^2+\lambda} + \frac{z z_1'}{c^2+\lambda} = 1. \tag{26}$$

Da nun die Gerade PQ beide Flächen berührt, ist sie die Schnittgerade von M und N, oder P liegt auch in N und Q in M. Es bestehen also die beiden Gleichungen

$$\frac{x_1 x_1'}{a^2} + \frac{y_1 y_1'}{b^2} + \frac{z_1 z_1'}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x_1 x_1'}{a^2+\lambda} + \frac{y_1 y_1'}{b^2+\lambda} + \frac{z_1 z_1'}{c^2+\lambda} = 1.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{x_1 x_1'}{a^2(a^2+\lambda)} + \frac{y_1 y_1'}{b^2(b^2+\lambda)} + \frac{z_1 z_1'}{c^2(c^2+\lambda)} = 0. \tag{27}$$

Nun sind aber $\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2}, \frac{z_1}{c^2}$ proportional den Richtungskosinus der Normalen des Ellipsoids in P, und ebenso $\frac{x_1'}{a^2+\lambda}, \frac{y_1'}{b^2+\lambda}, \frac{z_1'}{c^2+\lambda}$, denen der Normalen des Hyperboloids in Q. Aus Gl. (27) folgt also, daß diese beiden Normalen, und damit auch die zugehörigen Tangentialebenen M und N auf einander senkrecht stehen. Wir haben also zunächst den

Satz 8. Berührt eine Gerade zwei konfokale Flächen zweiter Ordnung, so stehen die in den Berührungspunkten konstruierten Tangentialebenen aufeinander senkrecht.

Geht man nun von P zu einem benachbarten Punkt P' auf der Kurve weiter, der also auf der Tangente PQ liegt, und konstruiert die Kurventangente in P', so berührt diese nach der Voraussetzung von Satz 7 ebenfalls das Hyperboloid, und zwar in einem zu Punkt Q infinitesimal benachbarten Punkt Q', der also noch in der Tangentialebene N liegt. Diese Ebene ist nun, da sie zwei konsekutive Tangenten der gegebenen Kurve enthält, deren Schmiegungsebene, andererseits aber ist sie nach Satz 8 als Tangentialebene des Hyperboloids in Q auch Normalebene des Ellipsoids in P, und dies gilt, wie für P, für jeden be-

liebigen Punkt der Kurve. Ihre Schmiegungsebene ist also überall Normalebene des Ellipsoids, also ist die Kurve (nach S. 134) eine geodätische Linie desselben. Damit ist der Satz 7 bewiesen. Er gilt, wie sich aus dem Beweis leicht ergibt, für zwei beliebige konfokale Flächen zweiter Ordnung.

Auch gilt die Umkehrung:

Alle Tangenten einer geodätischen Linie eines Ellipsoids berühren ein konfokales Hyperboloid.

Durch jeden Punkt P des Ellipsoids gehen im allgemeinen zwei gemeinsame Tangenten der beiden Flächen. Denn die Tangentialebene des Ellipsoids in P schneidet aus dem Hyperboloid einen Kegelschnitt aus. Die beiden von P aus an diesen Kegelschnitt gezogenen Tangenten berühren beide Flächen. Für jede der beiden läßt sich die im Beweis angegebene infinitesimale Konstruktion einer geodätischen Linie anwenden; es gehen also durch jeden Punkt des Ellipsoids im allgemeinen zwei geodätische Linien, deren Tangenten alle das Hyperboloid berühren. Es gibt also auf dem Ellipsoid zwei einfach unendliche Scharen solcher geodätischen Linien. Durch jeden Punkt P gehen zwei derselben; ihre Tangenten sind die beiden durch P gehenden gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen.

Liegt nun im besonderen der Punkt P auf der Schnittkurve der beiden Flächen, so fallen diese beiden Tangenten zusammen, und zwar wie man leicht sieht, in die Tangente der Schnittkurve. Das gleiche gilt von den Tangenten der beiden geodätischen Linien; die Schnittkurve wird also in jedem Punkt von den geodätischen Linien berührt, oder sie ist die Enveloppe derselben. Wir haben also:

Satz 9. Die geodätischen Linien, welche auf zwei konfokalen Flächen zweiter Ordnung nach Satz 7 bestimmt sind, berühren die Schnittkurven der beiden Flächen*).

Mit Hilfe der vorhergehenden Sätze kann man nun in anschaulicher Weise die durch einen Punkt P des Ellipsoids (und ebenso für jede Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung) in gegebener Richtung PP' ausgehende geodätische Linie

---

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 145.

konstruieren: Man spanne in der Richtung PP' einen Faden und konstruiere zu dem Ellipsoid eine konfokale Fläche zweiter Ordnung, die den Faden berührt. Jetzt führe man den gespannten Faden so an der konfokalen Fläche hin, daß er dieselbe stets berührt, dann legt sich der Faden auf das Ellipsoid als geodätische Linie auf, die durch P geht und dort die Tangente PP' besitzt. Man sieht so auch sehr leicht ein, daß die so konstruierte geodätische Linie, die Schnittkurve beider Flächen berührt.

§ 27. Die allgemeine Flächenkurve.

In den früheren Paragraphen wurden die besonderen Flächenkurven, wie Krümmungslinien, Asymptotenlinien, geodätische Linien betrachtet. Wir kommen nun zur Untersuchung der allgemeinen Flächenkurve. Eine solche ist analytisch bestimmt, wenn neben der Flächengleichung $F(x,y,z) = 0$ noch die Gleichung $\Phi(x, y, z) = 0$ einer zweiten Fläche gegeben ist, die aus der ersten die Flächenkurve ausschneidet. Es ist dann auch [vgl. § 2, Gl. (18)] die Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$ in jedem Punkte der Kurve bekannt, und es lassen sich, wie im Abschnitt I gezeigt wurde, die wichtigsten Elemente der allgemeinen Flächenkurve aufstellen, nämlich der Krümmungsradius r, der Torsionsradius ϱ und der Winkel H, den die Hauptnormale der Flächenkurve mit der Flächennormalen bildet, oder der Winkel, den die Schmiegungsebene der Kurve mit der durch ihre Tangente gehenden Normalebene bildet (vgl. § 18, S. 92).

Für die Untersuchung der besonderen Flächenkurven waren nun vier Differentialformen von Wichtigkeit (vgl. § 21 und 25), nämlich

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1}$$

$$L = a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = -da\,dx + db\,dy + dc\,dz, \tag{2}$$

$$M = \begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$N = \begin{vmatrix} a & dx & d^2x \\ b & dy & d^2y \\ c & dz & d^2z \end{vmatrix}, \tag{4}$$

wo die Gleichungen $ds^2 = 0, L = 0, M = 0, N = 0$ die Differentialgleichungen der Minimallinien (vgl. § 13), Asymptotenlinien, Krümmungslinien, geodätischen Linien sind. Es wird sich nun zeigen, daß die oben genannten Elemente auch für die allgemeinen Flächenkurven sich in sehr einfacher Weise durch diese vier Ausdrücke darstellen lassen.

Zu diesem Zweck sind noch einige Relationen erforderlich. Zunächst ist, wie schon in § 20, (14) bemerkt wurde

$$M^2 = ds^2\, ds_0^2 - L^2 \tag{5}$$

wo $ds_0^2 = da^2 + db^2 + dc^2$ das Linienelement der sphärischen Abbildungen war. Nach § 25, (4) ist weiter

$$MN = -ds\,(Ld^2s + ds\sum da\,d^2x), \tag{6}$$

nach § 20, (2), (3), (6)

$$\sum a^2 = 1, \sum adx = 0, \sum ada = 0. \tag{7}$$

Hierzu tritt noch die Gleichung

$$LM = \begin{vmatrix} da & dx & d^2x \\ db & dy & d^2y \\ dc & dz & d^2z \end{vmatrix}, \tag{8}$$

die noch zu beweisen ist.

Aus (5) folgt nach Einleitung (15)

$$M^2 = \begin{vmatrix} db & dy \\ dc & dz \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dc & dz \\ da & dx \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} da & dx \\ db & dy \end{vmatrix}^2. \tag{9}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (7) folgt nach Einleitung (16), bezw. (17)

$$a : b : c = \begin{Vmatrix} da & db & dc \\ dx & dy & dz \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) ergibt sich

$$Ma = \begin{vmatrix} db & dy \\ dc & dz \end{vmatrix}, \quad Mb = \begin{vmatrix} dc & dz \\ da & dx \end{vmatrix}, \quad Mc = \begin{vmatrix} da & dx \\ db & dy \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Multipliziert man die drei Gleichungen (11) bezüglich mit d^2x, d^2y, d^2z und addiert, so ergibt sich die Relation (8).

Wir bezeichnen zur Bestimmung von r, ρ und H die Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale wie im I. Abschnitt durch α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν.

Dann ist, da a, b, c die Richtungskosinus der Flächennormalen sind, nach § 4, (4)

$$\cos H = al + bm + cn = \sum \frac{ar}{ds^3}\left(ds\, d^2x - dx\, d^2s\right),$$

also nach (7) und (2)

$$\frac{\cos H}{r} = \frac{L}{ds^2}, \tag{12}$$

wie schon in § 22, (1) gefunden war.

Ferner ist der Winkel zwischen der Flächennormalen und der Binormalen offenbar das Komplement zu H, also nach § 4, (3)

$$\sin H = a\lambda + b\mu + c\nu = \frac{r}{ds^3}\begin{vmatrix} a & dx & d^2x \\ b & dy & d^2y \\ c & dz & d^2z \end{vmatrix},$$

oder nach (4)

$$\frac{\sin H}{r} = \frac{N}{ds^3}. \tag{13}$$

Löst man (12) und (13) nach H und r auf, so hat man für den Winkel H der Flächennormale gegen die Hauptnormale und für den Krümmungsradius r die Gleichungen

$$\operatorname{tg} H = \frac{N}{L\, ds}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{N^2 + L^2\, ds^2}{ds^6}. \tag{15}$$

Die Gleichungen (12)—(15) enthalten einige bemerkenswerte Sätze, die zum Teil schon früher hergeleitet wurden:

Aus (13) folgt, daß für $N = 0$ auch $H = 0$ wird, d. h.

Für eine geodätische Linie fällt die Hauptnormale stets mit der Flächennormalen zusammen.

Aus (12) ergibt sich, wenn $H = 0$ gesetzt wird, für den Krümmungsradius R eines Normalschnittes der schon in § 22, (2) hergeleitete Wert $\frac{1}{R} = \frac{L}{ds^2}$.

Ist für eine Kurve N und L gleichzeitig $= 0$, d. h. ist sie geodätische Linie und Asymptotenlinie zugleich, so folgt aus (15) $\frac{1}{r} = 0$, d. h. die Kurve ist eine Gerade.

Legt man durch eine Asymptotenrichtung in dem Flächenpunkte eine Schnittebene, so ist für die Schnittkurve in dem betreffenden Punkte $L = 0$. Wenn also die Schnittebene nicht mit der Tangentialebene zusammenfällt, d. h. wenn H nicht $= \frac{\pi}{2}$ ist, so folgt aus (12) für die Schnittkurve $\frac{1}{r} = 0$, d. h. sie hat in dem betreffenden Punkt einen Wendepunkt.

Für eine Asymptotenlinie, die nicht eine Gerade ist, für die also $\frac{1}{r}$ nicht $= 0$ ist, folgt aus (12) $H = \frac{\pi}{2}$ d. h.

Die Schmiegungsebene einer Asymptotenlinie fällt mit der Tangentialebene zusammen. Die Binormale einer Asymptotenlinie ist also die Flächennormale.

Für den Krümmungsradius der Asymptotenlinie ergibt sich aus (15) $\frac{1}{r} = \frac{N}{ds^3}$.

Um den Torsionsradius ρ zu bestimmen, differenzieren wir die Gleichung

$$\sin H = a\lambda + b\mu + c\nu$$

und erhalten

$$\cos H dH = \Sigma a d\lambda + \Sigma \lambda da$$

und hieraus nach § 6, (8) und (4)

$$\cos H dH = \frac{ds\, \Sigma al}{\rho} + \frac{r}{ds^3} \begin{vmatrix} da & dx & d^2x \\ db & dy & d^2y \\ dc & dz & d^2z \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Nach (8) und (12) folgt

$$\cos H dH = \frac{ds \cos H}{\rho} + \frac{M \cos H}{ds},$$

also schließlich

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dH}{ds} - \frac{M}{ds^2}. \tag{17}$$

Aus (17) folgt: Ist eine Flächenkurve zugleich Krümmungslinie ($M = 0$) und geodätische Linie ($H = 0$), so ist sie eine ebene Kurve $\left(\frac{1}{\varrho} = 0\right)$. Auch leitet man aus (17) leicht den Satz 2 des § 19 ab.

Außer den bisher betrachteten Größen sind für die Flächenkurven noch zwei weitere von Wichtigkeit, nämlich die geodätische Krümmung und die geodätische Torsion.

Die Definition der geodätischen Krümmung ist folgende: denkt man sich in einem Punkt P der Flächenkurve (vgl. Fig. 19) die berührende geodätische Linie gezogen, so hat diese das Linienelement PP' des Punktes P mit der Flächenkurve gemeinsam, dagegen wird das nächstfolgende Element $P'P''$ der Kurve mit dem folgenden $P'P_1''$ der geodätischen Linie nicht mehr zusammenfallen, sondern einen unendlich kleinen Winkel bilden. Dieser Winkel, der mit dw bezeichnet sei, gibt dann offenbar ein Maß für die Abweichung der Kurve von der berührenden geodätischen Linie, ebenso wie der Kontingenzwinkel dt (vgl. § 3) ein Maß für die Abweichung der Kurve von der berührenden Geraden gibt.

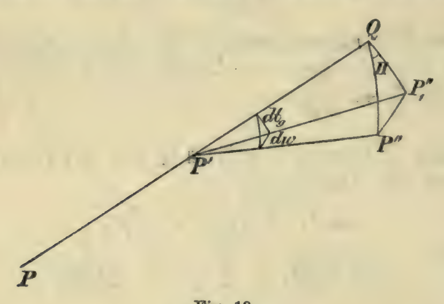


Fig. 19.

Der Winkel dw heißt deshalb der geodätische Kontingenzwinkel. Wie nun die gewöhnliche Krümmung $\frac{1}{r}$ einer Kurve mittels des Kontingenzwinkels dt bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds}, \tag{18}$$

so definieren wir mit Hilfe des geodätischen Kontingenzwinkels dw die geodätische Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ durch die Gleichung

$$(19) \qquad \frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{dw}{ds}.$$

Zur Berechnung dieser Größe beschreiben wir (vgl. Fig. 19) um P' eine Kugel mit dem Radius $ds = P'P''$, welche die geodätische Linie in P_1'', die Verlängerung von PP' in Q schneidet Dann ist

$$(20) \qquad \angle P''P'P_1'' = dw; \ \angle QP'P'' = dt.$$

Der $\angle QP'P_1''$ ist dann der Kontingenzwinkel der geodätischen Linie und sei mit dt_g bezeichnet. Er darf natürlich nicht mit dem geodätischen Kontingenzwinkel dw verwechselt werden. Ferner ist

Ebene $P''P'P_1''$ = Tangentialebene der Fläche,

Ebene $QP'P_1''$ = Schmiegungsebene der geodätischen Linie, also Normalebene der Fläche; es ist daher der Winkel an der Kante $P'P_1'' = \frac{\pi}{2}$.

Ebene $QP'P''$ ist die Schmiegungsebene der Flächenkurve, also ist der Winkel an der Kante $P'Q = H$.

$P''P_1''Q$ ist nun ein unendlich kleines sphärisches Dreieck; in demselben ist nach dem Obenstehenden

$$(21) \qquad \sphericalangle P''P_1''Q = \frac{\pi}{2}; \ \sphericalangle P''QP_1'' = H;$$

$$(22) \quad P''Q = ds\,dt; \ QP_1'' = ds\,dt_g; \ P_1''P'' = ds\,dw.$$

Da das Dreieck unendlich klein ist, darf es als ebenes Dreieck betrachtet und berechnet werden, es ist also

$$(23) \qquad \sin H = \frac{P_1''P''}{P''Q} = \frac{ds\,dw}{ds\,dt} = \frac{dw}{dt};$$

$$\cos H = \frac{QP_1''}{P''Q} = \frac{ds\,dt_g}{ds\,dt}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt mit (13), (18) und (19)

$$(24) \qquad \sin H = \frac{r}{\mathfrak{r}}; \ \frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{\sin H}{r} = \frac{N}{ds^3}.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich die geodätische Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}}$.

Ferner ist $\frac{ds}{dt_g}$ der Krümmungsradius der geodätischen Linie oder, was dasselbe ist, der Krümmungsradius des Normalschnitts, der durch PP' geht und in § 18 mit R bezeichnet wurde. Aus der zweiten Gleichung (23) folgt also

$$(25) \qquad \cos H = \frac{r}{R}; \quad r = R \cos H,$$

womit ein neuer Beweis der Meusnierschen Gleichung erbracht ist [vgl. § 18, (15)].

Da ferner die Ebene $QP'P_1''$ auf der Ebene $P''P'P_1''$ senkrecht steht, so ist (s. Fig. 19) dw die Projektion von dt ($= \angle QP'P''$) auf die Ebene $P''P'P_1''$ (Tangentialebene). Der geodätische Kontingenzwinkel ist also die Projektion des gewöhnlichen Kontingenzwinkels auf die Tangentialebene der Fläche.

Man kann daher auch sagen:

Die geodätische Krümmung einer Kurve ist gleich der Krümmung der auf die Tangentialebene projizierten Kurve.

Die geodätische Krümmung heißt deshalb auch tangentiale Krümmung; im Gegensatz dazu bezeichnet man die Größe $\frac{1}{R} = \frac{\cos H}{r}$ als normale Krümmung; $\frac{1}{r}$ heißt dann wohl auch die absolute Krümmung.

Da $N = 0$ die Differentialgleichung der geodätischen Linie ist, folgt: Eine geodätische Linie hat überall die geodätische Krümmung Null.

Bemerkung. Die geodätische Krümmung ist besonders deshalb von Wichtigkeit, weil sie sich bei einer Biegung der Fläche ohne Faltung und Dehnung, die in Bd. II, § 11 ausführlich behandelt wird, nicht ändert (Minding)*). Denn da bei einer solchen Verbiegung offenbar alle Winkel und Strecken auf der Fläche ungeändert bleiben, so bleibt zunächst einmal eine geodätische Linie (als kürzeste Verbindung zweier Punkte) bei der Verbiegung eine geodätische Linie, dw und ds bleiben aber auch erhalten, und wir haben so den Satz

---

*) Journ. f. Math. VI. p. 159. (1830).

Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve bleibt bei einer Verbiegung der Fläche ungeändert.

Da die geodätischen Linien einer abwickelbaren Fläche bei Abwicklung der Fläche in eine Ebene in Geraden übergehen, und die geodätische Krümmung einer Kurve auf der abwickelbaren Fläche sich nicht ändert, so folgt, daß die geodätische Krümmung dieser Kurve mit der Krümmung der ebenen Kurve zusammenfällt, in welche sie bei der Abwickelung übergeht.

Unter der geodätischen Torsion $1:\bar{\varrho}$ einer Flächenkurve in einem Punkt P versteht man die Torsion der geodätischen Linie, welche mit jener Kurve das Bogenelement in P gemein hat oder die Kurve in P berührt. Die geodätische Torsion der Kurve $PP'P''$ (s. Fig. 19) ist also gleich der Torsion der geodätischen Linie $PP'P_1''$. Da nun für letztere H den konstanten Wert Null hat, folgt aus (17) für die geodätische Torsion $1:\bar{\varrho}$

$$\frac{1}{\bar{\varrho}} = -\frac{M}{ds^2}. \tag{26}$$

Aus (26) folgt, daß die geodätische Torsion der Krümmungslinien in jedem Punkt gleich Null ist.

Im Gegensatz zur geodätischen Torsion $1:\bar{\varrho}$ nennt man die gewöhnliche Torsion $1:\varrho$ auch die absolute Torsion.

Anmerkung. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei darauf hingewiesen, daß in den Bezeichnungen „geodätische Krümmung“ und „geodätische Torsion“ das Beiwort „geodätisch“ in verschiedenem Sinn gebraucht ist. Die geodätische Krümmung ist nicht etwa, analog der geodätischen Torsion, die Krümmung der berührenden geodätischen Linie. Letztere ist vielmehr die oben als „normale Krämmung“ bezeichnete Größe.

§ 28. Übungsaufgaben zu Abschnitt II.

1. Ein Kreis rotiere um eine ihn nicht schneidende Gerade (z-Achse). Man stelle die Gleichung der entstehenden Ringfläche, sowie die Gleichungen der Tangentialebene und Normale in einem beliebigen Punkt derselben auf (15, 16).

2. Man stelle für diese Ringfläche die Gleichung des Schmiegungsparaboloids und der Indikatrix auf:

a) in einem Punkt des innersten Parallelkreises,
b) in einem Punkt des äußersten Parallelkreises,
c) in einem Punkt des obersten Parallelkreises.

Man schneide die Ringfläche in allen drei Fällen mit der Tangentialebene des betreffenden Punktes und untersuche die Schnittkurve; insbesondere bestimme man die Tangenten im Berührungspunkt (15, 16).

Anleitung. **Man stelle zuerst die in § 16 angenommene spezielle Lage des Koordinatensystems her.**

3. Für die Fläche

$$z = lg\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$

(Scherck sche Minimalfläche) im Koordinatenursprung Schmiegungsparaboloid, Indikatrix und Hauptkrümmungsradien zu bestimmen (16, 17, 18).

4. Eine kubische Parabel rotiert um eine Parallele zu ihrer Wendetangente. Für einen Punkt des vom Wendepunkt beschriebenen Parallelkreises Schmiegungsparaboloid und Indikatrix aufzustellen (16, 17). (Vgl. Anleitung zu Aufgabe 2.)

5. Man stelle die Gleichung der Fläche auf, die von den Krümmungskreisen der Normalschnitte eines Flächenpunktes gebildet wird (18).

Resultat: $(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}\right) = 2z\,(x^2+y^2).$

6. Zu beweisen: Für zwei konjugierte Richtungen ist die Summe der Krümmungsradien der zugehörigen Normalschnitte konstant, nämlich gleich der Summe der Hauptkrümmungsradien (18).

7. Zu beweisen: Sind R und R' die Krümmungsradien zweier aufeinander senkrechten Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}. \tag{18}$$

8. Man zeige, daß jede ebene Schnittkurve, welche eine Asymptotenlinie berührt, im Berührungspunkt einen Wendepunkt hat (18, 27).

9. Man drücke den Winkel ψ der Asymptotenlinien durch die Hauptkrümmungsradien aus (18).

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}\right).$$

10. Mit Hilfe des Satzes von Meusnier zeige man, daß in einem Punkt einer Rotationsfläche der eine Hauptkrümmungsradius gleich dem Stück der Normalen zwischen Rotationsachse und Flächenpunkt ist. (Der andere ist gleich dem Krümmungsradius des Meridians.) (18).

11. Mit Hilfe des Satzes von Euler suche man den Krümmungsradius einer Schraubenlinie. (Die Schmiegungsebene derselben ist Normalebene des Zylinders.) (18).

12. Man berechne den Winkel zwischen zwei konjugierten Richtungen (18).

13. Welches ist die Bedingung dafür, daß die Asymptotenrichtungen aufeinander senkrecht stehen? Was für eine Kurve ist in diesem Fall die Indikatrix und welche Relation besteht zwischen den Hauptkrümmungsradien? (17, 18).

14. a) Man bestimme die Gleichung der Flächennormalen in einem Punkt der Indikatrix, ihren Winkel dw mit der ζ-Achse und die kürzeste Entfernung dl beider.

b) Dieselbe Aufgabe für einen allgemeinen Flächenpunkt $P(x, y, z)$: d. h. für die Normale eines Nachbarpunktes $P'(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ den Winkel dw gegen die Normale in P und die kürzeste Entfernung dl von derselben zu bestimmen.

Anleitung. a) Man benütze das Schmiegungsparaboloid [§ 18, (7)] und verfahre nach § 16, (5).

b) Die Lösung ergibt sich aus Einl. (9) und (10), nämlich [vgl. § 20, (8) und (13)]

$$dw^2 = \Sigma\, da^2 = ds_0^{\,2}; \quad dl = \frac{M}{ds_0}.$$

15. Man beweise mit Hilfe der in 14. gefundenen Resultate die beiden Sätze:

a) Sind ds_1 und ds_2 die Linienelemente zweier konjugierten Richtungen und dw_1, dw_2 die zugehörigen Werte von dw, so ist*)

*) V. Kommerell. Mitteilungen des math. naturwiss. Vereins in Württemberg. II. Serie. III. Bd. 2. Heft. S. 50.

$$\left(\frac{dw_1}{ds_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{dw_2}{ds_2}\right)^2 = k^2,$$

wo k das Krümmungsmaß bedeutet.

b) Für eine Asymptotenrichtung erhält dl einen Maximalwert und wird gleich dem Linienelement. Das Linienelement einer Asymptotenlinie ist also die kürzeste Entfernung der in seinen Endpunkten errichteten Flächennormalen.

Anleitung. a) Man benutze das Schmiegungsparaboloid, führe in der $\xi\eta$-Ebene Polarkoordinaten (ϱ, φ) ein, drücke $\frac{dw}{ds}$ durch φ aus und eliminiere φ aus der gefundenen Gleichung, und aus § 17, (4) unter Benutzung von § 18, (5).

b) Der Satz ergibt sich, indem man die wie bei a) durch φ ausgedrückte Größe $\frac{dl}{ds}$ nach φ differenziert. Er folgt übrigens auch geometrisch aus der Schlußbemerkung zu § 5 und S. 157.

16. Man leite aus den Resultaten der Aufgabe 14. die Differentialgleichung der Krümmungslinien und der Asymptotenlinien her.

Anleitung. Für eine Hauptkrümmungsrichtung ist $\frac{dl}{ds} = 0$; für eine Asymptotenrichtung ist $\frac{dl}{ds} = 1$. Mit Benutzung von § 20, (14) ergibt sich leicht die Lösung.

17. Mit Hilfe der Resultate von Aufgabe 14. beweise man die beiden Sätze

a) Für eine Asymptotenlinie ist das Quadrat der Torsion gleich dem negativen Krümmungsmaß*).

b) Für eine geodätische Linie ist das Quadrat der Torsion gleich dem Produkt aus den Differenzen ihrer Krümmung gegen die beiden Hauptkrümmungen des betr. Punktes**).

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{p}}\right)^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Anleitung. a) ist ein spezieller Fall von 15a). Zum Beweis von b) drücke man, wie in (15), $\frac{dl}{ds}$ und $\frac{dw}{ds}$ durch φ aus, und führe an Stelle von φ vermittelst § 18, (6) den Krümmungsradius R des zugehörigen Normalschnitts ein. Bildet man dann

---

*) Enneper, Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1870. p. 499.

**) V. Kommerell. Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe. 1. Bd. S. 117.

das Produkt $\frac{dl}{ds}\,\frac{dw}{ds}$, so ergibt sich das Weitere aus den Resultaten von Aufg. 14. und § 27, (26).

18. Man suche den geometrischen Ort für die Schnittpunkte der Nachbarnormalen eines Punktes mit den Hauptschnittebenen*).

Anleitung. Man errichte (wie in Aufg. 14) die Flächennormalen in den Punkten der Indikatrix und bestimme ihre Schnittpunkte mit der $\xi\zeta$- und der $\eta\zeta$-Ebene.

19. Man bestimme das sphärische Bild eines beliebigen Punktes der Indikatrix und beweise mit Hilfe der gefundenen Resultate folgende Sätze:

a) Die Asymptotenrichtungen stehen auf ihren sphärischen Bildern senkrecht.

b) Das sphärische Bild einer von zwei konjugierten Richtungen steht auf der andern senkrecht (20).

Anleitung Führe in der $\xi\eta$-Ebene Polarkoordinaten ein.

20. Man leite die Formeln (4), (8) und (10) des § 21 aus den Resultaten der Aufgabe 19. her (20, 21).

21. Man beweise den Satz:

Der Krümmungsradius des Normalschnitts durch ein beliebiges Linienelement ist gleich dem negativen Verhältnis dieses Linienelements zu der Projektion seines sphärischen Bildes auf die Richtung des Linienelements selbst (20, 22).

Anleitung. Ist ∂ der Winkel des Linienelements gegen sein sphärisches Bild, so ist $\cos\partial = \frac{\Sigma\, da\, dx}{ds\, ds_0}$; dann weiter nach § 20, Gl. (12) und § 22, Gl. (2).

22. Man berechne für einen elliptischen Punkt die Fläche des sphärischen Bildes der Indikatrix und zeige, daß deren Verhältnis zur Fläche der Indikatrix selbst gleich dem Krümmungsmaß der Fläche ist (20) (vgl. § 22, Satz 3).

23. Man lasse längs der kubischen Parabel ($z = -y^3$; $x = 0$) den Scheitel der Parabel ($z = ax^2$; $y = 0$) hingleiten; man bestimme die Gleichung der entstehenden Fläche, die Asymptotenlinien sowie die parabolische Kurve (21, 22). (Die Figur 9c, S. 80 gibt ein Bild dieser Fläche).

24. Man integriere die Differentialgleichung der Asymptotenlinien für eine Rotationsfläche (Polarkoordinaten). Anwendung auf das einmantlige Rotationshyperboloid (21).

---

*) Ch. Sturm. Mémoire sur la théorie de la vision. Comptes rendus 20. (Paris 1845.) p. 554.

25. Man bestimme die Krümmungslinien und Asymptotenlinien der beiden Paraboloide (21).

Anleitung. Man stelle die Differentialgleichungen nach § 21, (18a) und (19a) auf. Für die Asymptotenlinien wird sie sofort integrierbar, für die Krümmungslinien setze man $x = \sqrt{u}$, $y = \sqrt{v}$. Nachdem rational gemacht ist, ergibt sich eine in u und v lineare Differentialgleichung (Clairaut'scher Typus), die durch Weiterdifferenzieren*) und Eliminieren von $\frac{du}{dv}$ integrabel wird.

26. Beweis des Satzes: Liegt eine Gerade ganz auf einer Fläche, so ist sie eine Asymptotenlinie derselben (21 oder 18, Satz 2).

27. Man bestimme für eine beliebige Fläche das zu $z =$ konst. konjugierte Kurvensystem (21).

28. Man zeige, daß die parabolische Kurve ($rt = s$) entweder der Ort der Spitzen oder die Enveloppe der Asymptotenlinien ist.

Anleitung. Man stelle die Bedingung dafür auf, daß die beiden durch § 21, (19a) definierten Asymptotenrichtungen zusammenfallen.

29. Man zeige, daß die Kreispunkte des dreiachsigen Ellipsoids ($a > b > c$) die Koordinaten haben (22):

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{(a^2 - c^2)},$$
$$y^2 = 0,$$
$$z^2 = \frac{c^2(b^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)}.$$

30. Man bestimme die Rotationsfläche, deren mittlere Krümmung konstant $= 0$ ist (22, oder nach Aufgabe 10).

31. Man bestimme die Rotationsfläche mit konstantem negativem Krümmungsmaß (wie Aufgabe 30).

32. Man bestimme die Rotationsfläche, für welche das Verhältnis der Hauptkrümmungsradien $= \pm \frac{1}{2}$ ist (wie Aufgabe 30).

33. Man bestimme die Kreispunkte der Fläche $xyz = a^3$ (22).

*) Vgl. S. S. XIII. Schlesinger, Differentialgleichungen, S. 268.

34. Man bestimme auf dem Ellipsoid die Kurven, längs deren das Krümmungsmaß konstant ist, und zeige, daß für alle Punkte einer solchen Kurve der Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkt konstant ist (22).

35. Man bestimme den geometrischen Ort der Kreispunkte einer Schar von konfokalen zweimantligen Hyperboloiden (22, 23).

36. Der Radius der geodätischen Krümmung eines Parallelkreises auf einer Rotationsfläche ist gleich dem Stück der Meridiantangente zwischen dem Berührungspunkt und der Drehachse (27).

37. Für eine Asymptotenlinie ist die absolute Krümmung gleich der geodätischen Krümmung und ebenso die absolute Torsion gleich der geodätischen Torsion (27).

38. Ist eine Flächenkurve eben, und sind längs derselben alle Flächennormalen parallel, so ist sie zugleich Krümmungslinie und Asymptotenlinie und gehört der parabolischen Kurve an.

Anleitung. Beweis entweder geometrisch nach § 17 u. 18, oder analytisch $\left(\frac{1}{\varrho} = 0;\quad H = \frac{\pi}{2}\right)$ nach § 27.

39. Umkehrung. Ist eine Flächenkurve zugleich Krümmungslinie und Asymptotenlinie, so ist, von singulären Stellen abgesehen, die Kurve eben, die längs derselben errichteten Flächennormalen sind parallel (senkrecht zur Ebene der Kurve) und die Kurve gehört der parabolischen Kurve an (17, 18 oder 27).

40. Jede ebene geodätische Linie ist eine Krümmungslinie (27).

41. Ist jede ebene Krümmungslinie auch eine geodätische Linie? (Nein, vgl. die Parallelkreise einer Rotationsfläche) (27).

Register.

Die Zahlen bedeuten die Seiten

I.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

R.

S.

T.

W.

Z.

Druck von Paul Dünnhaupt, Cöthen (Anhalt).

